PROVA TEÓRICA - GABARITO

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS

OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS DE 2021

Instruções Gerais

1. Escreva seu NOME COMPLETO, o número da sua reunião Zoom e da sua sala em TODAS as folhas de respostas que serão escaneadas;
2. Escreva o número de cada questão na folha de resposta, bem como o número da página;
3. Essa prova é de aplicação única. NÃO HAVERÁ SEGUNDA CHAMADA;
4. O preenchimento da Folha Resumo de Respostas é obrigatório;
5. A duração da prova é de 3 (três) horas e o tempo para escanear é de 20 (vinte) minutos, sem possibilidade de tempo adicional, a não ser em casos de imprevistos;
6. A prova é composta por 10 questões (totalizando 325 pontos), divididas nas seguintes categorias:
   - Questões Curtas - **5 questões**, sendo 2 valendo 15 pontos, 1 valendo 20 pontos e 2 valendo 25 pontos.
   - Questões Médias - **3 questões**, sendo 1 valendo 30 pontos e 2 valendo 35 pontos.
   - Questões Longas - **2 questões**, sendo 1 valendo 55 pontos e 1 valendo 70 pontos.
7. A prova é individual e sem consultas. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada na página 2, assim como no Classroom da seletiva.
8. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas/com acesso a internet;
9. As resoluções das questões, numeradas de 1 a 10, podem ser feitas a lápis (bem escuro) ou caneta e devem ser apresentadas de forma clara, concisa e completa. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Sempre que possível, use desenhos e gráficos. Recomendamos o uso de borracha, régua e compasso;
10. Você pode utilizar folhas de rascunho para auxiliar no processo de resolução da prova, mas elas não devem ser entregues no formulário.

Instruções Específicas

1. Só serão aceitos arquivos em pdf. Em caso de dúvidas, leia o passo a passo da OBA de como escanear suas soluções disponível no Classroom.
2. Os alunos só poderão se comunicar com o fiscal de sua sala por meio do chat da plataforma Zoom. São vedadas quaisquer dúvidas em relação ao conteúdo da prova
3. Ao terminar a prova, avise o fiscal de sala pelo chat da plataforma Zoom e aguarde por instruções;
4. Os microfones deverão permanecer fechados a todo tempo. O estudante deve manter dois equipamentos conectados a sua sala zoom durante o curso da prova, de forma que possa ser visto durante toda sua duração;
5. O uso de aparelhos celulares ou câmeras fotográficas só são permitidos enquanto o aluno realiza o scan de suas soluções.
6. Para questões em branco, escreva no topo da questão subsequente “Pulei a questão anterior”.

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5,98 \cdot 10^{24}\ kg$	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6,38 \cdot 10^{6}\ m$	
Aceleração da gravidade superficial ($g_\oplus$)	$9,8\ m/s^2$	
Obliquidade da Eclíptica	$23°27'$	
Ano Tropical	$365,2422$ dias solares médios	
Ano Sideral	$365,2564$ dias solares médios	
Albedo	$0,39$	
Dia sideral	$23h\ 56min\ 04s$	

Massa	$7,35 \cdot 10^{22}\ kg$	**Lua**
Raio	$1,74 \cdot 10^{6}\ m$	
Distância média à Terra	$3,84 \cdot 10^{8}\ m$	
Inclinação Orbital com relação à Eclíptica	$5,14°$	
Albedo	$0,14$	
Magnitude aparente (lua cheia média)	$-12,74\ mag$	

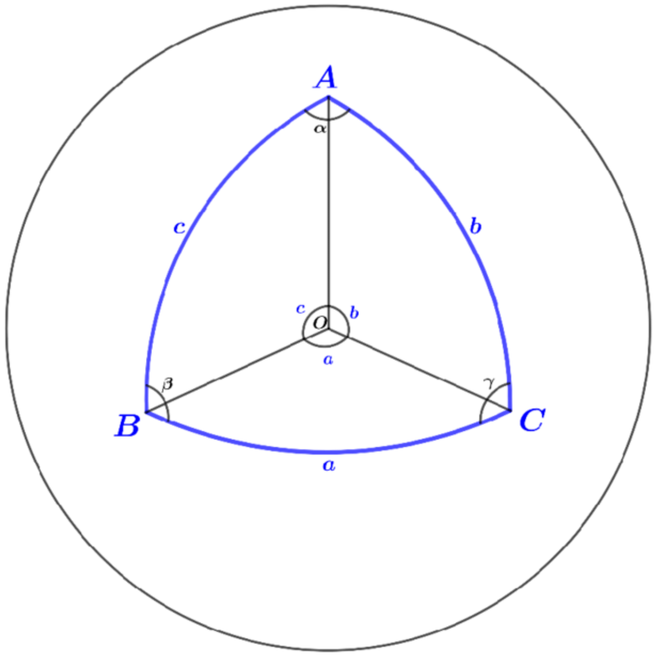
Massa ($M_\odot$)	$1,99 \cdot 10^{30}\ kg$	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6,96 \cdot 10^{8}\ m$	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3,83 \cdot 10^{26}\ W$	
Magnitude Absoluta ($\mathcal{M}_\odot$)	$4,80\ mag$	
Magnitude Aparente ($m_\odot$)	$-26,7\ mag$	
Diâmetro Angular	$32'$	
Velocidade de Rotação na Galáxia	$220\ km\,s^{-1}$	
Distância ao Centro Galático	$8,5\ kpc$	

Diâmetro da pupila humana	$6\ mm$	**Distâncias e tamanhos**
Magnitude limite do olho humano nu	$+6\ mag$	
$1\ UA$	$1,496 \cdot 10^{11}\ m$	
$1\ pc$	$206.265\ UA$	

Constante Gravitacional (G)	$6,67 \cdot 10^{-11}\ N \cdot m^2 \cdot kg^{-2}$	**Constantes Físicas**
Constante Universal dos Gases (R)	$8,314\ N \cdot m \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$	
Constante de Planck (h)	$6,63 \cdot 10^{-34}\ J \cdot s$	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1,38 \cdot 10^{-23}\ J \cdot K^{-2}$	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5,67 \cdot 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$	
Constante de Hubble (H_0)	$67,8\ km \cdot s^{-1} \cdot Mpc^{-1}$	
Velocidade da luz no vácuo (c)	$3,0 \cdot 10^{8}\ m/s$	
Massa do Próton	$938,27\ MeV \cdot c^{-2}$	
$\lambda_{H\alpha}$ medido em laboratório	$656\ nm$	

Formulário

- Para um Triângulo Esférico:



Lei dos senos:

$$\frac{sen(a)}{sen(\alpha)} = \frac{sen(b)}{sen(\beta)} = \frac{sen(c)}{sen(\gamma)}$$

Lei dos cossenos:

$$cos(a) = cos(b) \cdot cos(c) + sen(b) \cdot sen(c) \cdot cos(\alpha)$$

- Forma Polar da elipse :

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1 + e \cdot cos(\theta)}$$

- Critério de resolução de Rayleigh:

$$\theta_{min} \approx 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

- Lei de Hubble:

$$v_{rad} = H_0 \cdot d$$

- Lei de Stefan-Boltzmann:

$$F = \epsilon \cdot \sigma \cdot T^4$$

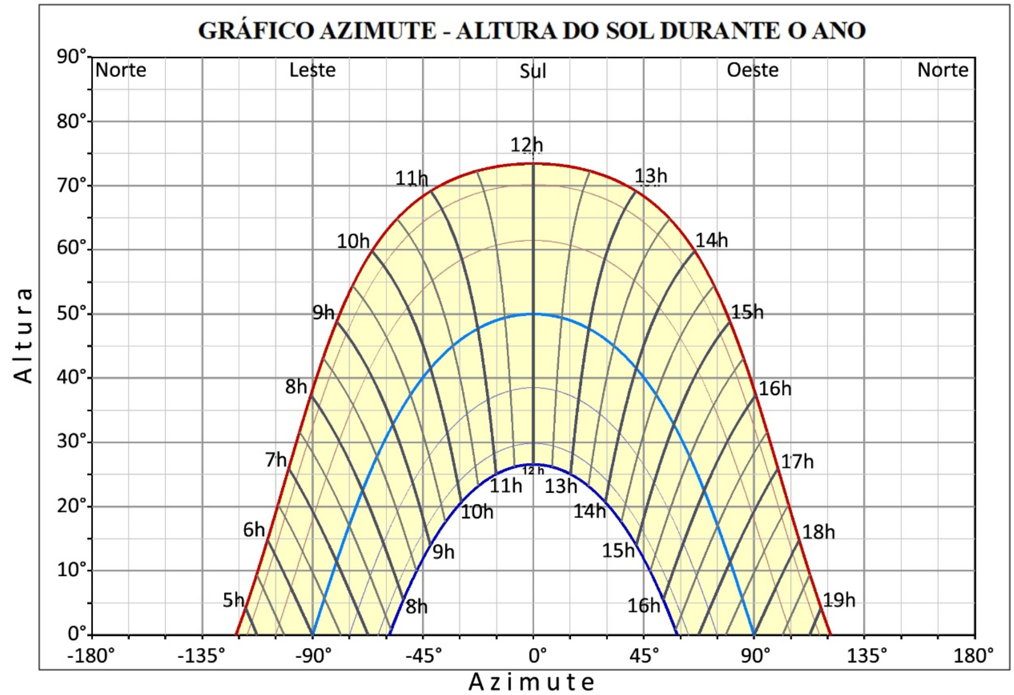
sendo ϵ a emissividade do corpo irradiante, com $\epsilon = 1$ para corpos negros

- Efeito Doppler Clássico:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v_{rad}}{c}$$

Questões Curtas

1. **(15 pontos)** O gráfico abaixo traz a altura do Sol em função do azimute em uma determinada cidade, ao longo de um ano inteiro.



Sabendo que as horas no gráfico correspondem ao Tempo Solar Verdadeiro do local, responda:

(a) **(5 pontos)** Qual é a latitude geográfica desta cidade?

(b) **(3 pontos)** Qual será a distância zenital do Sol às 14 horas do dia do Solstício de Verão?

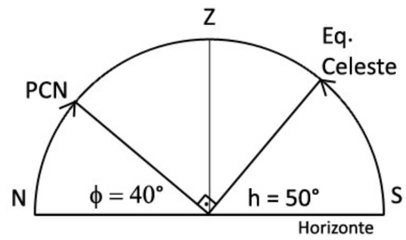
(c) **(3 pontos)** Qual será o azimute do Sol às 11 horas do dia do Solstício de Inverno?

(d) **(4 pontos)** A que horas o Sol estará 45° acima do Horizonte nos dias dos Equinócios?

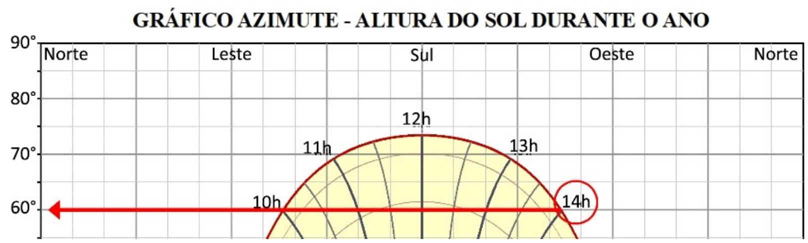
Solução:

(a) Nos dias dos Equinócios (representados pela curva azul claro), o Sol se encontra sobre o Equador Celeste. Pelo gráfico, vemos que ao meio-dia solar verdadeiro a altura do Sol neste dia é de $h = 50°$, de forma que esta é, também a altura do Equador Celeste para esta cidade. Sendo assim, sua latitude geográfica será $\phi = 90° - h$.

Como a passagem meridiana do Sol neste dia se deu ao Sul do Zênite, a cidade se encontra do Hemisfério Norte. Portanto, $\boxed{\phi = +40°}$, ou $\boxed{\phi = 40°\ N}$.

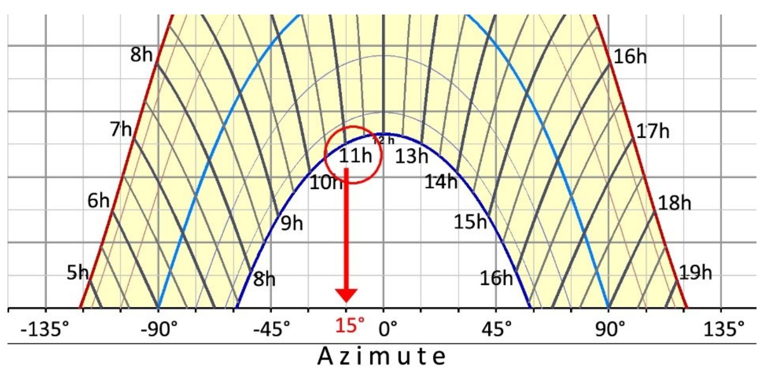


(b) Pelo gráfico, vemos que às 14 horas do dia do Solstício de Verão (representado pela curva vermelha) o Sol estará com altura $h = 60°$. Sua distância zenital será $z = 90° - h$.



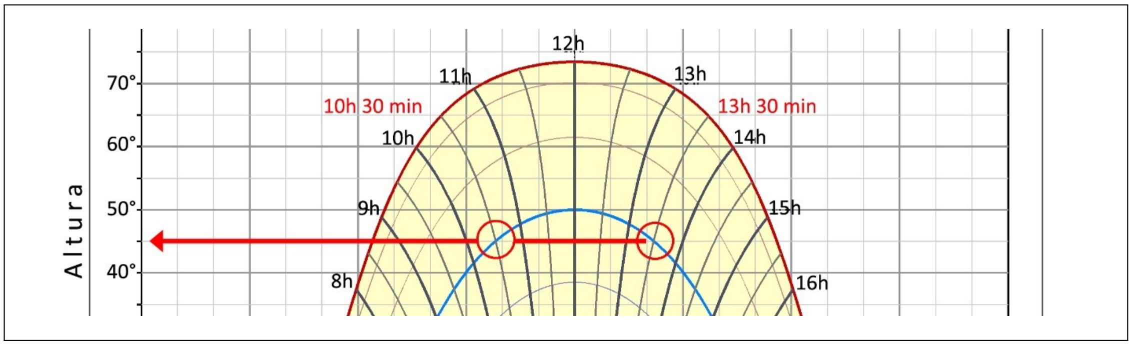
Portanto, $\boxed{z = 30°}$.

(c) Pelo gráfico, vemos que às 11 horas do dia do Solstício de Inverno (representado pela curva azul escuro) estará à 15° a Leste.



Portanto, $\boxed{A = -15°}$

(d) Pelo gráfico, vemos que nos dias dos Equinócios (representados pela curva azul claro), o Sol atinge $h = 45°$ de altura às $\boxed{10h\ 30min \text{ e às } 13h\ 30min}$.



2. **(15 pontos)** O famoso astronauta Juvenas está em uma missão espacial muito importante para o avanço da humanidade. Seu amigo, Cabrito, influente engenheiro aeroespacial, pergunta qual o seu paradeiro. Juvenas, entretanto, não dá a resposta diretamente: apenas diz estar em um asteroide e que, quando em oposição com relação à Terra, a magnitude aparente do Sol medida por ele é $m_A = -24,85\ mag$.

   Cabrito, inteligente como sempre, decide medir o tamanho angular do asteroide em oposição a fim de determinar exatamente de onde seu amigo enviou sua resposta. O valor obtido foi de $\theta_A = 0,530''$.

   Com base na tabela abaixo, em qual asteroide o astronauta realizava sua missão?

Tabela 1: Tabela de Asteroides

Nome	Diâmetro Médio (km)
Vesta	525
Hígia	431
Interamnia	326
Euphrosyne	268
Themis	196

Dado: As órbitas são coplanares e todos os efeitos de extinção podem ser desprezados.

Solução:

(i) Esquematizando o problema:

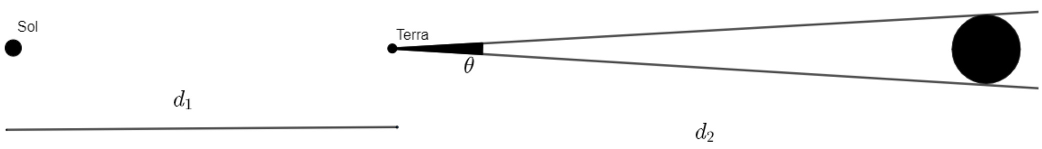


Figura 1: Da Terra, Cabrito observa o asteroide com tamanho angular θ.

(ii) Fazendo uso da equação de Pogson, podemos escrever:

$$\begin{cases} m_T - m_{Vega} = -2,5log(\frac{L_\odot}{4\pi d_1^2}\frac{1}{F_o}) \\ m_A - m_{Vega} = -2,5log(\frac{L_\odot}{4\pi (d_1+d_2)^2}\frac{1}{F_o}) \end{cases} \quad (1)$$

Assim, subtraindo a equação de baixo pela de cima, encontramos a expressão da distância entre Terra e o asteroide:

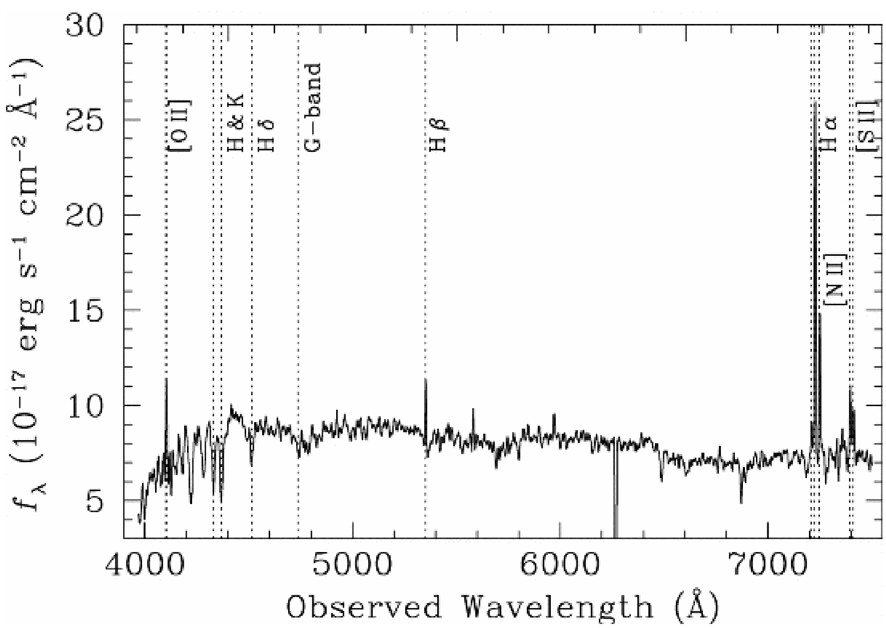
$$d_2 = [10^{(\frac{m_A - m_T}{5})} - 1]d_1 = [10^{(\frac{26,72-24,85}{5})} - 1] \times 1 = 1,366UA \quad (2)$$

Da figura, relacionamos a distância encontrada com o diâmetro médio do corpo celeste:

$$D = d_2\theta = 1,366 \times 1,496 \times 10^8 \times (\frac{0,530}{206265}) = 525km \quad (3)$$

Segundo consta na tabela, esse asteroide corresponde a $\boxed{Vesta}$.

3. **(20 pontos)** Determine a luminosidade, em watts, de uma galáxia com inclinação $i = 0°$, magnitude aparente $m = 18,2$ e cujo espectro está representado na figura abaixo. Desconsidere os efeitos relativísticos.



Solução:

A partir da imagem podemos ver que o comprimento de onda da linha espectral H_α é $\lambda_{H\alpha} \approx 7200\mathring{A}$.(qualquer valor maior que $7199\mathring{A}$ e menor do que $7300\mathring{A}$ foi considerado correto)

Com essa informação em mãos e usando o $\lambda_{H\alpha 0}$ podemos usar a fórmula do redshift para calcular o z.

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

$$z = \frac{7200 - 6560}{6560} = 0,097561$$

substituindo z na equação abaixo temos que:

$$z = \frac{v}{c}$$

$$0,097561 = \frac{v}{c}$$

$$v = 29268km/s$$

Sabendo disso podemos substituir a velocidade na Lei de Hubble e obter a distância:

$$V = H_0 \cdot D$$

$$D = 431,686Mpc$$

Agora resta apenas calcular a magnitude absoluta pelo módulo da distância e com isso calcular a luminosidade.

$$m - M = 5\ log\ D - 5$$

$$18,2 - M = 5\ log\ (431,686 \cdot 10^6) - 5$$

$$M = -19,9758$$

$$M - M_{sol} = -2,5log\frac{L}{L_{Sol}}$$

$$-19,9758 - 4,80 = -2,5log\frac{L}{3,83 \cdot 10^{26}}$$

$$\boxed{L = 3,12 \cdot 10^{36}W}$$

Na prática, não podemos substituir a distância própria no módulo da distância, pois o redshift diminui o fluxo (aumenta o comprimento de onda da luz diminuindo sua energia) que chega na Terra. Para contornarmos esse problema, define-se a distância de luminosidade como sendo a distância própria multiplicada por um fator de correção $(z+1)$, já que, dessa forma, levamos em consideração o efeito causado pelo redshift. Para uma explicação mais a fundo do motivo por trás dessa diferença e quando se deve usar cada distância, leia o capítulo 6 do livro Introduction to Cosmology escrito pela Barbara Ryden.

4. **(25 pontos)** A figura abaixo é a primeira imagem direta de um exoplaneta, feita em 2004 pelo *Very Large Telescope* (VLT). Trata-se do planeta *2M1207b*, cinco vezes mais massivo que Júpiter e que descreve uma órbita aproximadamente circular de raio $r = 55\ UA$ ao redor da estrela *2M1207*, cuja massa é $M = 0,025\ M_\odot$. A foto foi construída a partir de observações na banda de infravermelho próximo L (comprimento de onda $\lambda = 3,8\ \mu m$). Considerando uma revolução do planeta em torno da estrela, calcule a duração total, em anos, do período de tempo em que o VLT não conseguiria resolver angularmente a separação entre *2M1207b* e *2M1207*, mantendo sempre as condições de observações descritas acima.

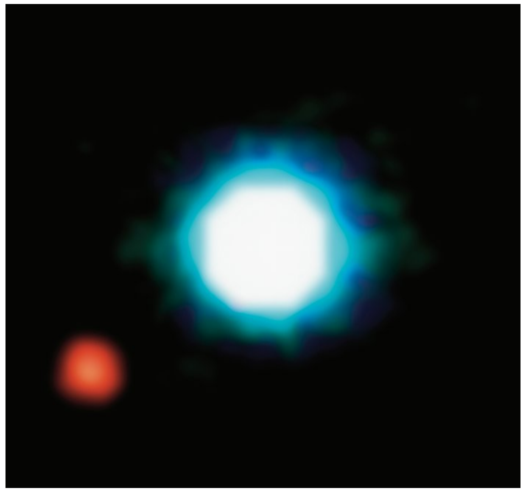


Figura 2: Créditos: *ESO*.

Dados:

- Massa de Júpiter: $1,90 \cdot 10^{27}\ kg$
- Distância de *2M1207* ao Sol: $d = 70,5\ pc$
- Diâmetro do espelho primário do VLT: $D = 8,20\ m$
- Considere que a linha de visada esteja contida no plano da órbita de *2M1207b* em torno de seu estrela

Solução: Primeiramente, usa-se o critério de Rayleigh para determinar a separação angular mínima que o VLT consegue resolver:

$$\theta_{min} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

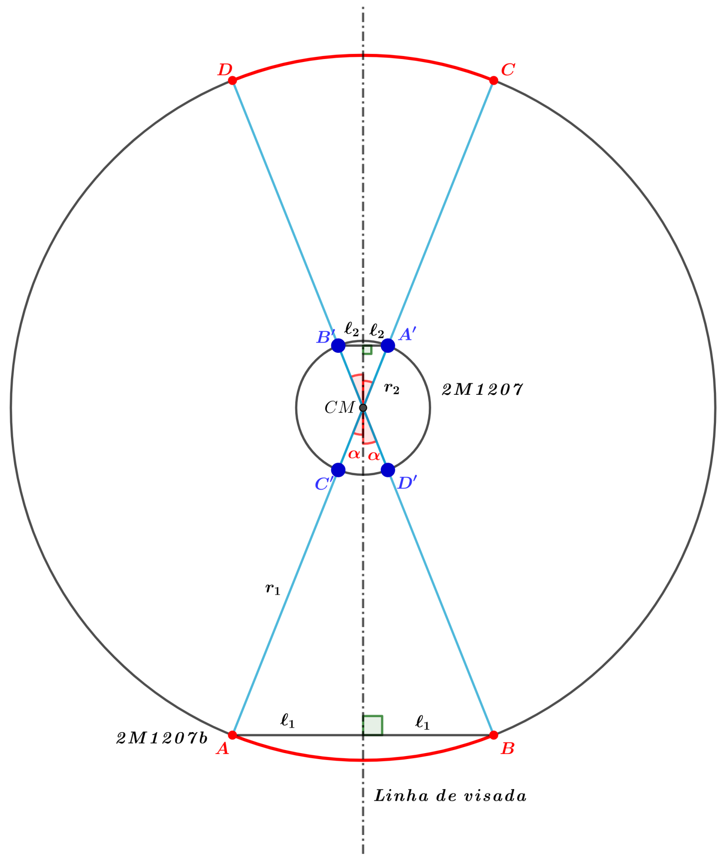
A distância angular entre *2M1207* e o planeta, quando vistos pelo VLT, é dada por

$$\theta = \frac{\ell}{d}$$

sendo o caso limite

$$\theta_{min} = \frac{\ell_{máx}}{d} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \iff \ell_{máx} = 1,22 \cdot \frac{\lambda d}{D} \tag{4}$$

Dado que a linha de visada do VLT está contida no plano orbital ($i = 90°$), esquematiza-se



Quando o planeta percorre as regiões da órbita destacadas em vermelho, $\ell < \ell_{máx}$ e o telescópio não é capaz de resolver angularmente o par. Sendo assim, ao percorrer 4α, o planeta não é detectado nas condições de observação dadas.

A distância entre quaisquer pontos X e X' da imagem é $r = 55\ UA$, igual à soma dos raios das órbitas individuais $(r_1 + r_2)$. Logo, tomando a semirreta AA' como base, calcula-se a distância projetada entre os objetos, quando vistos pelo VLT:

$$\begin{cases} \ell_{máx} = \ell_1 + \ell_2 \\ \sin\alpha = \dfrac{\ell_1}{r_1} \\ \sin\alpha = \dfrac{\ell_2}{r_2} \end{cases} \iff \ell_{máx} = (r_1 + r_2)\sin\alpha = r\sin\alpha \tag{5}$$

Observação: considerando-se a órbita relativa diretamente, o resultado obtido é o mesmo.

Relacionando-se o arco α com o período da órbita:

$$\frac{4\alpha}{\Delta t} = \frac{2\pi}{T} \iff \Delta t = \frac{2\alpha T}{\pi} \tag{6}$$

Substituindo-se as expressões encontradas anteriormente, (4), (5) e (6)

$$\boxed{\Delta t = \frac{2T}{\pi} \cdot \arcsin\left(1,22 \cdot \frac{\lambda d}{rD}\right)}$$

O período pode ser obtido da Terceira Lei de Kepler, para as massas em unidades de $M_\odot$, r em UA e T em anos:

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{1}{M_E + M_P} \iff T = \sqrt{\frac{55^3}{0,025 + 5 \cdot 9,5 \cdot 10^{-4}}} = 2364,8 \ anos$$

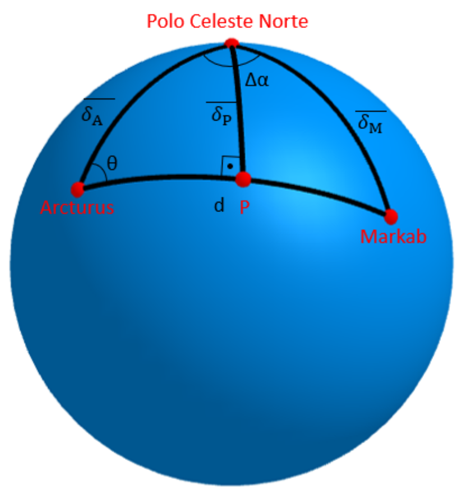
Retomando-se a expressão de Δt:

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 2364,8}{\pi} \cdot \arcsin\left(1,22 \cdot \frac{3,8 \cdot 10^{-6} \cdot 70,5 \cdot 206265}{55 \cdot 8,2}\right) \approx \boxed{226 \ anos}$$

Fonte: `https://www.eso.org/public/images/26a_big-vlt/`

5. **(25 pontos)** Em uma certa noite, Gigirotto, ao estudar melhor o movimento do satélite Gelecaio-42, percebe que este logo passará por seu meridiano local. Ela decide então descobrir a que distância, naquele momento, Gelecaio-42 estará do Kennedy Space Center, na Flórida ($\phi = 28° \ 31' \ 27" \ N$), onde ela está passando suas férias. Gigirotto sabe que o satélite se move em uma órbita circular de altura $h = 420 \ km$, e, ao analisar dados de um almanaque astronômico, descobre que, em uma certa noite, ele terá, em momentos diferentes, as mesmas coordenadas geocêntricas de 2 estrelas: Arcturus (α_A = 14h 15m 38s; $\delta_A = 19° \ 10' \ 19"$) e Markab ($\alpha_M$ = 23h 04m 46s; $\delta_M = 15° \ 12' \ 19"$). Por coincidência, ela percebe que Gelecaio-42 passará pelo seu meridiano local exatamente quando estiver no ponto de sua órbita com maior declinação. Qual a distância que Gigirotto deverá encontrar, em km, no momento desse fenômeno?

Solução: Primeiramente, precisamos encontrar o ponto de maior declinação da trajetória. Como a partir desse ponto as declinações diminuem para os 2 lados, podemos inferir que o ângulo de vértice P é reto.



Usamos então uma combinação de leis dos senos e cossenos para encontrar a máxima declinação do satélite:

$$\cos d = \sin \delta_A \sin \delta_M + \cos \delta_A \cos \delta_M \cos \Delta\alpha$$

$$d = 121° \ 48' \ 36"$$

Disso:

$$\frac{\sin d}{\sin \Delta\alpha} = \frac{\cos \delta_M}{\sin \theta}$$

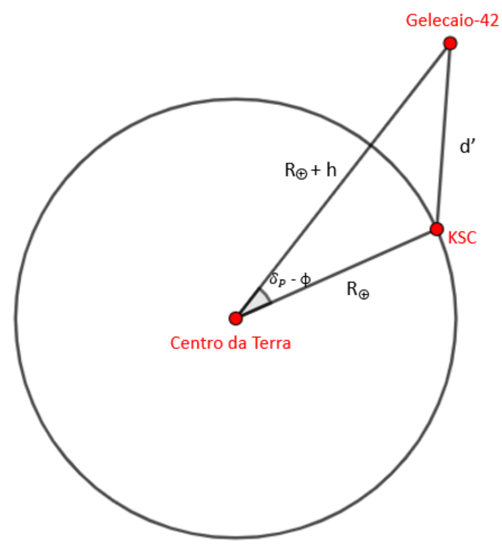
$$\theta = 57^\circ\ 09'\ 07"$$

E:

$$\frac{\cos \delta_A}{\sin 90^\circ} = \frac{\cos \delta_P}{\sin \theta}$$

$$\delta_P = 37^\circ\ 29'\ 05"$$

Agora podemos encontrar a distância do objeto até Gigirotto. Temos a seguinte situação:



Assim, basta aplicar uma lei dos cossenos para acabar a questão:

$$d'^2 = (R_\oplus + h)^2 + R_\oplus^2 - 2\ R_\oplus\ (R_\oplus + h)\ \cos(\delta_P - \phi)$$

Portanto, $\boxed{d' = 1100\text{km}}$.

Questões Médias

6. **(30 pontos)** Em uma aula de astronomia sobre estrelas binárias, a professora da turma apresentou a seus alunos Albireo (β Cyg), da constelação de Cisne. Informou a eles que levaria seu telescópio para a escola em uma noite sem nuvens para que eles pudessem observar a beleza das duas estrelinhas. No entanto, ela precisava verificar se era possível fazer a observação com o telescópio que possuía em casa e deu esse desafio a seus alunos.

   A professora informou que seu telescópio podia observar estrelas com fluxo até $F_{lim} = 3 \times 10^{-16} F_\odot$ e sabe-se que a separação angular das estrelas de Albireo é $\theta = 34''$. Com essas informações, resolva os itens abaixo:

(a) **(15 pontos)** Calcule a magnitude limite observável pelo telescópio (em mag) e seu diâmetro (em milímetros);

(b) **(5 pontos)** Calcule o poder de resolução do telescópio (em segundos de arco) e verifique se é possível observar as duas estrelas de Albireo com esse instrumento;

(c) **(10 pontos)** Calcule o diâmetro do campo de visão (em segundos de arco) do telescópio sabendo que a estrela Deneb (α Cyg) fica $\Delta t = 2$ minutos nesse campo.

Dados:

- Diâmetro da pupila humana: $D_{olho} = 6$ mm
- Magnitude limite do olho humano: $m_{olho} = 6$
- Comprimento de onda central da banda visível $\lambda_v = 550$ nm
- Declinação de Deneb: $\delta_\star = 45°16'49,3''$

Solução:

(a) Para o cálculo da magnitude limite do telescópio:

$$m_{lim} - m_\odot = -2,5.log\left(\frac{F_{lim}}{F_\odot}\right) \tag{7}$$

$$m_{lim} + 26,7 = -2,5.log\left(\frac{3.10^{-16}F_\odot}{F_\odot}\right) \Rightarrow m_{lim} = -2,5.log(3.10^{-16}) - 26,7$$

$$\boxed{m_{lim} = 12,1}$$

Para o cálculo do diâmetro do telescópio:

$$m_{lim} - m_{olho} = -2,5.log\left(\frac{D_{olho}}{D_{tel}}\right)^2 \Rightarrow m_{lim} = 2,1 + 5.log(D_{tel}) \tag{8}$$

Como o diâmetro do olho humano foi usado em milímetros, então D_{tel} deve estar em milímetros. Utilizando o valor $m_{lim} = 12,1$ encontrado

$$m_{lim} = 2,1 + 5.log(D_{tel}) \Rightarrow D_{tel} = 10^{\frac{(m_{lim}-2,1)}{5}} = 10^{\frac{(12,1-2,1)}{5}}$$

$$\boxed{D_{tel} = 100\ mm}$$

(b) Com o valor do comprimento de onda da luz visível, podemos calcular o poder de resolução do telescópio

$$\theta_p = 1,22.\frac{\lambda_v}{D_{tel}} \tag{9}$$

$$\theta_p = 1,22.\frac{550.10^{-9}}{0,1} = 6,71.10^{-6}rad = 1,38''$$

$$\boxed{\theta_p = 1,38''}$$

Agora, podemos comparar o poder de resolução do telescópio com a separação angular das estrelas de Albireo. Como $\theta_p = 1,4''$ é menor do que $\theta = 34''$, então é possível ver as duas estrelinhas de Albireo.

(c)

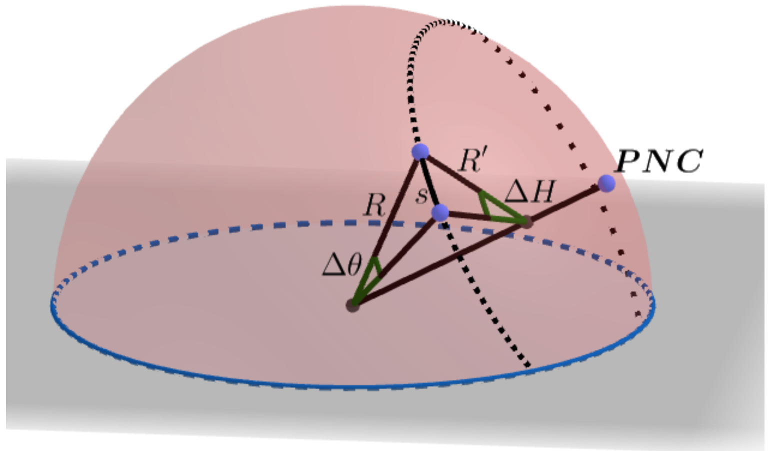


Figura 3: Representação da esfera celeste e dos ângulos e medidas envolvidos no problema

Sabe-se que $s = R'\Delta H$ e $s = R\Delta\theta$. Além disso, $R' = Rcos(\delta_\star)$, então

$$R\Delta\theta = R'\Delta H \Leftrightarrow R\Delta\theta = Rcos(\delta_\star)\Delta H \Leftrightarrow \Delta\theta = cos(\delta_\star)\Delta H$$

Sendo Δt o tempo que a estrela permanece no campo do telescópio e $\omega_\oplus$ a velocidade angular da Terra:

$$\omega_\oplus = \frac{\Delta H}{\Delta t} \Rightarrow \Delta H = \omega_\oplus \Delta t$$

Substituindo na expressão para $\Delta\theta$:

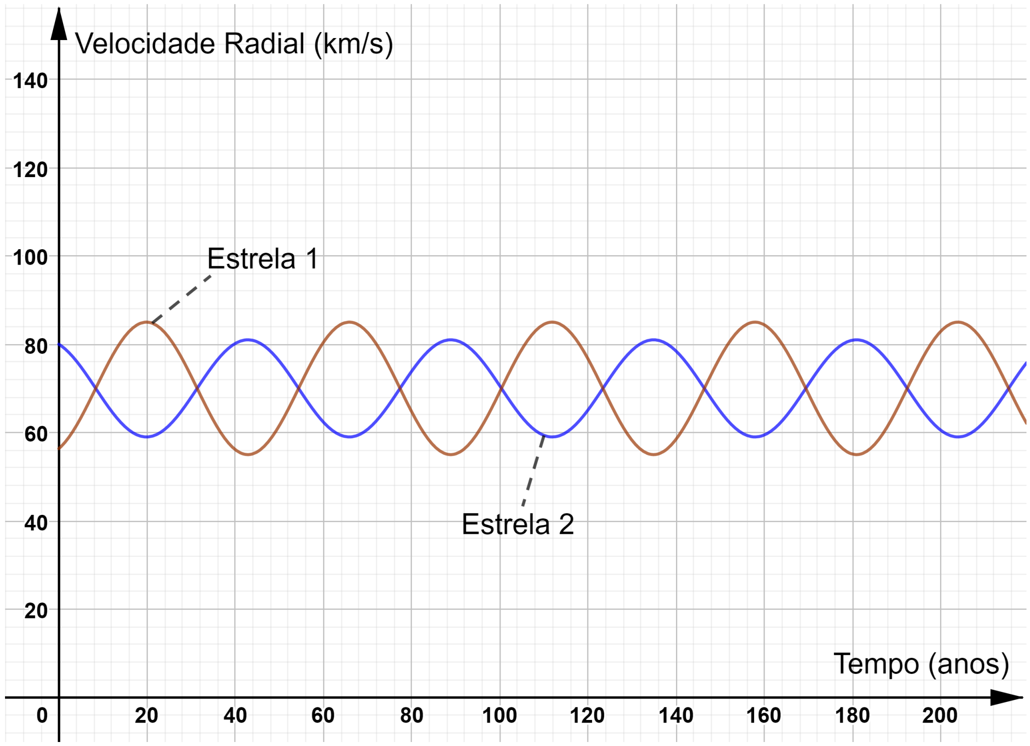
$$\Delta\theta = cos(\delta_\star)\Delta H \Leftrightarrow \Delta\theta = cos(\delta_\star)\omega_\oplus\Delta t$$

Substituindo os valores, temos:

$$\Delta\theta = cos(45^\circ 16' 49,3'')\frac{1296000''}{86164s}120s = 1270''$$

$$\boxed{\Delta\theta = 1270''}$$

7. **(35 pontos)** Uma estudante de astronomia observa um sistema binário e tem em mãos o gráfico das velocidades radiais medidas de cada componente em função do tempo, como mostrado abaixo. Ela fica maravilhada com a quantidade de informações que podemos obter de um único gráfico.



Assuma que as órbitas das estrelas são circulares e que a inclinação dos planos de órbita em relação ao plano do céu são de 90°. Analisando o gráfico, responda:

(a) **(3 pontos)** Qual a velocidade radial do centro de massa do sistema, em km/s?

(b) **(4 pontos)** Quais as velocidades v_1 e v_2 das componentes em relação ao centro de massa do sistema, em km/s?

(c) **(8 pontos)** Determine os raios das órbitas das estrelas, r_1 e r_2, em unidades astronômicas.

(d) **(15 pontos)** Determine a massa de cada uma das componentes, m_1 e m_2, em massas solares.

(e) **(5 pontos)** Suponha que a estudante obtenha um gráfico da magnitude pelo tempo do sistema binário. Poderíamos obter as variáveis a seguir combinando o gráfico inicial com o dos eclipses?

Responda com S se sim e N se não para cada item. Não é necessário justificar.

I. A magnitude aparente de cada estrela;

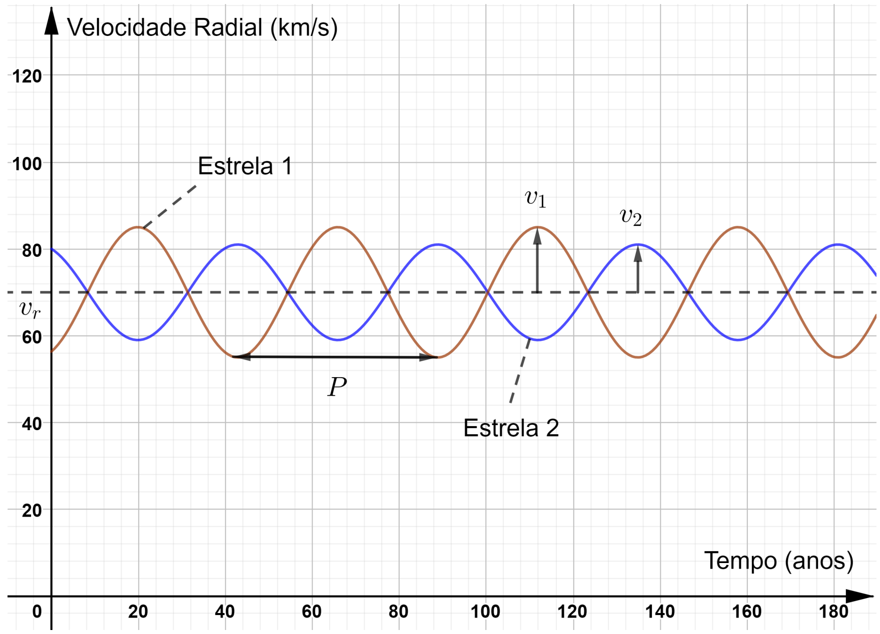
II. O raio de cada estrela;

III. A classe espectral de cada estrela;

IV. A composição química de cada estrela.

V. A distância ao sistema.

Solução:



(a) A velocidade radial do centro de massa do sistema é a velocidade radial das estrelas quando as velocidades radiais das duas componentes são iguais, ou seja, estão paradas uma em relação à outra nessa direção radial. Assim, medindo a velocidade radial desse eixo de simetria no gráfico, encontramos $\boxed{v_r = 70 \text{ km/s}}$.

(b) Como as órbitas são circulares, as velocidades das estrelas são constantes. Portanto, a velocidade radial só varia pela projeção na nossa direção, em um fator seno. Assim, podemos falar que as amplitudes das curvas são as velocidades das componentes 1 e 2. Uma outra forma de pensar é subtraindo a velocidade radial máxima de cada estrela pela velocidade radial do centro de massa.

De qualquer forma, obtemos $\boxed{v_1 = 15 \text{ km/s}}$ e $\boxed{v_2 = 11 \text{ km/s}}$.

(c) Podemos medir o período do sistema pela figura, $P = 46$ anos. Como as órbitas são circulares, podemos escrever:

$$v = \frac{2\pi r}{P}$$

ou seja,

$$r = \frac{vP}{2\pi}$$

Substituindo para 1 e 2, encontramos $\boxed{r_1 = 23,2 \text{ UA} \;\text{ e }\; r_2 = 17,0 \text{ UA}}$.

(d) Como o centro de massa não se move no seu próprio referencial:

$$v_1 m_1 = v_2 m_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{v_2}{v_1} = 0,733$$

Uma outra forma de chegar ao mesmo resultado é derivando a velocidade orbital a partir da resultante centrípeta e da força gravitacional.

Substituindo na terceira lei de Kepler:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}(r_1 + r_2)^3$$

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{Gm_1\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}(r_1 + r_2)^3$$

$$m_1 = \frac{4\pi^2}{GP^2\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right)}(r_1 + r_2)^3$$

Assim, encontramos $\boxed{m_1 = 13,0\ M_\odot}$.

Com a razão m_1/m_2, obtemos também $\boxed{m_2 = 17,7\ M_\odot}$.

Observação: Usando as unidades $M_\odot$, anos e UA, o valor numérico de G é $4\pi^2$. Com isso, a 3ª lei de Kepler fica:

$$P^2 = \frac{(a_1 + a_2)^3}{m_1 + m_2}$$

simplificando as contas de forma significativa.

(e) Analisando os itens:

I. S - É possível obter as magnitudes diretamente da curva de luz, observando as magnitudes nos momentos de eclipse e comparando com a magnitude inicial.

II. S - Com os tempos de duração dos eclipses e a velocidade de cada estrela, conseguimos os raios das estrelas.

III. S - Manipulando os fluxos durante os eclipses primário e secundário, e o fluxo inicial, obtemos as temperaturas efetivas das estrelas. Como as classes espectrais são diretamente ligadas às temperaturas, podemos então encontrar as classes espectrais.

IV. S - Conseguimos a composição química diretamente da classe espectral, obtida no item anterior.

V. S - Com os raios e as temperaturas efetivas que já, podemos determinar as luminosidades de cada estrela. Comparando a luminosidade total e o fluxo total, obtemos a distância até o sistema. De forma alternativa, a luminosidade poderia ser calculada a partir da relação massa-luminosidade.

8. **(35 pontos)** Uma anã branca é um remanescente estelar composto principalmente por matéria eletronicamente degenerada que não mais produz energia por fusão nuclear. À medida que perde energia por radiação, ela esfria com o tempo e, eventualmente, espera-se que atinja o equilíbrio de temperatura com o espaço, emitindo tão pouca energia que pode vir a ser chamada de anã negra. Nesse problema, analisaremos o resfriamento da anã branca mais próxima do sistema solar: *Sirius B*.

Considere que *Sirius B* seja composta integralmente por carbono e que tenha uma massa de $1,02\,M_\odot$, raio de $0,0080\,R_\odot$ e luminosidade de $0,024\,L_\odot$. Considere, também, que *Sirius B* tenha raio constante em todos os itens abaixo.

(a) **(5 pontos)** Considerando que a estrela se encontra a uma distância de $2,64\,pc$ do sistema solar, encontre sua magnitude aparente bolométrica. Ignore qualquer fonte de extinção.

(b) **(10 pontos)** Suponha que *Sirius B* esfrie de uma temperatura efetiva T para uma temperatura efetiva $T - \Delta T$. Encontre a razão entre a variação de magnitude bolométrica e a variação de temperatura efetiva $\frac{\Delta m}{\Delta T}$. Considere $\frac{\Delta T}{T} \ll 1$.
Se necessário, utilize: $\ln(1+x) \approx x$ para $x \ll 1$. Dê sua resposta em função de T.

(c) **(5 pontos)** Considere que *Sirius B* esfrie 10 K. Calcule sua variação de magnitude bolométrica Δm.

(d) **(15 pontos)** A temperatura interna de uma anã branca é aproximadamente constante em todo seu volume. Contudo, nas proximidades da superfície, sua temperatura efetiva cai drasticamente devido a efeitos de opacidade. Assim, sua temperatura efetiva T_{eff} se relaciona com sua temperatura interna T_{int} de acordo com a seguinte equação:

$$T_{eff} = \alpha \cdot (T_{int})^{\frac{7}{8}}, \text{ em que } \alpha \approx 0,014\ K^{\frac{1}{8}}$$

Com base nisso, calcule o tempo (em anos) para que a temperatura efetiva T_{eff} de Sirius esfrie 10 K. Para tal, considere que o calor específico molar a volume constante do carbono seja igual a $c_v = 3R$, onde R é constante universal dos gases. A massa molar do carbono é de 12 g/mol. Para fins de simplificação, considere que a estrela só perca energia por emissão de radiação.
Use que $(1+x)^n \approx 1 + nx$ para $x \ll 1$, caso necessário.

Solução:

(a) Primeiramente, teremos a seguinte expressão para o fluxo da estrela:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}$$

Comparando com a magnitude absoluta do Sol:

$$\begin{aligned} M_\odot - m_{bol} &= 2,5 \log\left(\frac{F_{bol}}{F_\odot}\right) \\ &= 2,5 \log\left(\frac{10^2}{2,64^2} \cdot 0,024\right) \end{aligned}$$

Assim, sabendo que $M_\odot = 4,83$, chegamos em:

$$\boxed{m_{bol} \approx 5,96}$$

(b) Podemos escrever o seguinte:

$$m_f - m_i = -2,5 \log\left(\frac{L_f}{L_i}\right) = -2,5 \log\left(\frac{\alpha(T-\Delta T)^4}{\alpha T^4}\right)$$

Na equação acima, α é uma constante que depende da distância, raio e outras constantes físicas. Assim, teremos:

$$\Delta m = -2,5 \log\left(\frac{T-\Delta T}{T}\right)^4 \rightarrow \Delta m = -10 \log\left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right)$$

Alterando o logarítmo acima para base neperiana:

$$\Delta m = -\frac{10}{\ln(10)} \ln\left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right) \rightarrow \Delta m \approx \frac{10}{\ln(10)} \cdot \frac{\Delta T}{T}$$

Assim, chegamos na seguinte resposta:

$$\boxed{\frac{\Delta m}{\Delta T} = 4,34 \cdot \frac{1}{T}}$$

(c) Nesse item, primeiramente precisamos calcular a temperatura efetiva de *Sirius B*:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

Substituindo os valores apresentados no enunciado, encontramos:

$$T_{eff} \approx 25400\ K$$

Utilizando a fórmula anterior, teremos:

$$\Delta m = \frac{4,34}{25400} \cdot (10) \rightarrow \boxed{\Delta m = +1,71 \cdot 10^{-3}}$$

(d) Primeiramente, temos a seguinte relação entre a variação de temperatura e a energia emitida pela anã branca:

$$Mc_v \Delta T = \Delta E$$

$$Mc_v \frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{\Delta E}{\Delta t}$$

Podemos escrever a seguinte equação:

$$Mc_v \frac{\Delta T_{int}}{\Delta t} = L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4$$

Precisamos encontrar uma relação entre ΔT_{int} e ΔT_{eff}. Usando a equação dada no enunciado, vamos analisar o que ocorre quando há um decréscimo de temperatura ΔT_{eff}:

$$T_{eff} - \Delta T_{eff} = \alpha \cdot (T_{int} - \Delta T_{int})^{\frac{7}{8}} = \alpha \cdot T_{int}^{\frac{7}{8}} \cdot \left(1 - \frac{\Delta T_{int}}{T_{int}}\right)^{\frac{7}{8}}$$

Utilizando que $(1+x)^n \approx 1 + nx$ para $x \ll 1$:

$$T_{eff} - \Delta T_{eff} = \alpha \cdot T_{int}^{\frac{7}{8}} \cdot \left(1 - \frac{7\Delta T_{int}}{8T_{int}}\right)$$

Assim, chegamos na seguinte relação:

$$\Delta T_{eff} = \alpha \cdot \frac{7\Delta T_{int}}{8T_{int}^{\frac{1}{8}}}$$

$$\Delta T_{int} = \frac{8 \cdot T_{int}^{\frac{1}{8}} \Delta T_{eff}}{7\alpha}$$

Agora, como sabemos a dependência de T_{int} com T_{eff}, basta que substituemos T_{eff} na relação acima e, depois, façamos isso na expressão que associa com a luminosidade, chegando em:

$$\Delta T_{int} = \frac{8 \cdot \Delta T_{eff}}{7\alpha} \cdot \left(\frac{T_{eff}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{7}}$$

$$Mc_v \cdot \frac{8 \cdot \Delta T_{eff}}{7\alpha} \cdot \left(\frac{T_{eff}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{7}} = L\Delta t$$

Como a luminosidade é aproximadamente constante (já que a temperatura efetiva muda muito pouco), podemos considerá-la inalterável. Isolando Δt acima:

$$\Delta t = Mc_v \cdot \frac{8 \cdot \Delta T_{eff}}{7\alpha \cdot L} \cdot \left(\frac{T_{eff}}{\alpha}\right)^{\frac{1}{7}}$$

Sabemos que a massa molar do carbono é de 12 g/mol. Então, temos que o calor específico do carbono pode ser escrito como:

$$c_v = 3 \cdot 8,314 \frac{J}{mol \cdot K} = \frac{3 \cdot 8,314 \cdot 10^3}{12} \frac{J}{kg \cdot K}$$

Podemos, então, calcular o Δt, fazendo as devidas substituições:

$$\boxed{\Delta t \approx 93000 \; anos}$$

Questões Longas

9. **(55 pontos)** O cometa Hale-Bopp foi um dos maiores cometas observados no século XX e um dos mais brilhantes das últimas décadas. Um fato curioso sobre ele é que o plano de sua órbita faz aproximadamente 90° com a eclíptica. Sabendo que sua excentricidade é de cerca de $0,995$ e seu semi-eixo maior é de aproximadamente 186 UA, responda os seguintes itens:

   (a) **(5 pontos)** Qual o seu período orbital (em anos)?

   (b) **(5 pontos)** Calcule sua distância periélica e afélica (em UA).

   (c) **(7 pontos)** Calcule sua velocidade orbital (em relação ao Sol) nos pontos de periélio e afélio (em km/s).

   É conhecido que o ângulo entre o vetor-posição - em relação ao Sol - do cometa em seu ponto de periélio e o plano da eclíptica é de cerca de 50°. Com base nisso:

   (d) **(8 pontos)** Calcule as distâncias entre o Sol e o cometa, nos pontos em que ele passa sobre o plano da eclíptica, em UA. Dica: lembre-se da equação polar de uma elipse.

   (e) **(10 pontos)** Considere que, em uma de suas passagens pelo seu periélio, o cometa possui a mesma longitude eclíptica geocêntrica que o Sol. Calcule as duas possíveis distâncias Cometa-Terra (em UA) para essa configuração.

   (f) **(20 pontos)** Calcule o movimento próprio (em segundos de arco por hora) do cometa para um observador na Terra na configuração anterior de maior distância Cometa-Terra. Desconsidere, para fins de simplificação, a rotação da Terra.

Solução:

(a) Da Terceira Lei de Kepler, usando-se T em anos e a em UA:

$$\frac{T^2}{a^3} = 1 \iff T = a^{3/2} \approx 2540 \; anos$$

(b) Primeiramente, calculam-se as distâncias periélica (r_p) e afélica (r_a) do cometa:

$$\begin{cases} r_p = a(1-e) = 0,930 \; UA \\ r_a = a(1+e) = 371 \; UA \end{cases}$$

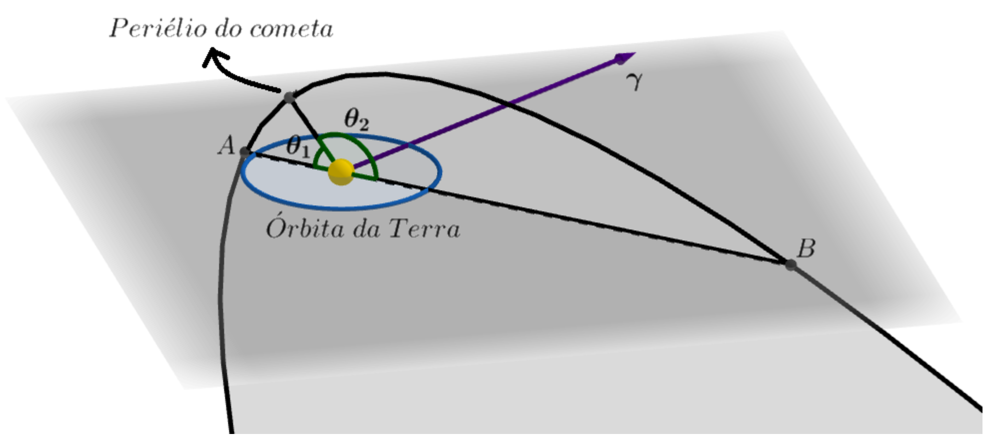
(c) Para determinação das velocidades nos pontos em questão, usa-se a equação de Vis-viva:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)}$$

Substituindo-se as expressões de r_p e r_a explicitadas anteriormente, escreve-se

$$\begin{cases} v_p = \sqrt{\dfrac{GM(1+e)}{a(1-e)}} = 43,6 \; km/s \\ v_a = \sqrt{\dfrac{GM(1-e)}{a(1+e)}} = 0,109 \; km/s \end{cases}$$

(d) Da geometria do problema, esboça-se:



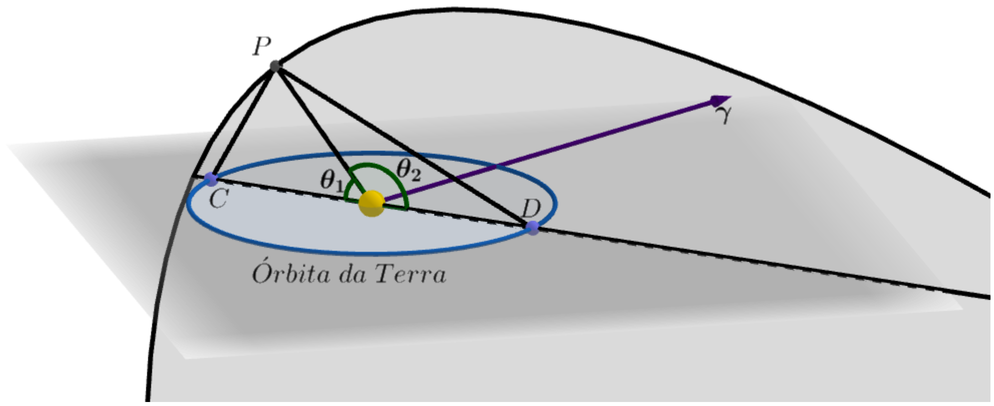
Segundo o enunciado, o ângulo entre o plano da eclíptica e o periélio é 50°, então $\theta_1 = 50°$, portanto $\theta_2 = -130°$. Vamos utilizar estes ângulos a seguir:
No ponto A da imagem, da equação polar da elipse:

$$r(\theta_1) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cdot\cos(\theta)} = \frac{186\cdot(1-0,995^2)}{1+0,995\cdot\cos(50°)} = 1,13 \; UA$$

Analogamente:

$$r(\theta_2) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cdot\cos(\theta)} = \frac{186\cdot(1-0,995^2)}{1+0,995\cdot\cos(-130°)} = 5,15 \; UA$$

(e) Novamente, esquematiza-se a situação conforme a imagem:



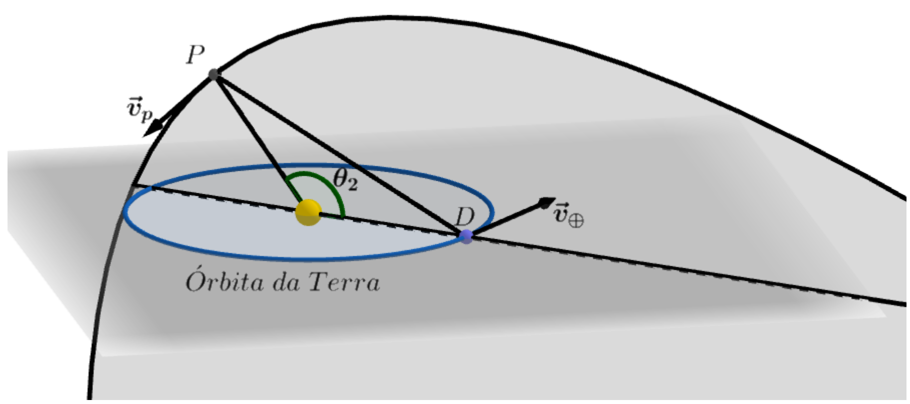
Aplicando-se a lei dos cossenos no triângulo PSC, obtém-se a primeira distância requerida, d_1:

$$d_1^2 = r_p^2 + r_\oplus^2 - 2r_p r_\oplus \cos\theta_1 \implies d_1 = \sqrt{r_p^2 + r_\oplus^2 - 2r_p r_\oplus \cos\theta_1} = 0,818\ UA$$

Analogamente, para o triângulo PSD,

$$d_2^2 = r_p^2 + r_\oplus^2 - 2r_p r_\oplus \cos\theta_2 \implies d_2 = \sqrt{r_p^2 + r_\oplus^2 - 2r_p r_\oplus \cos\theta_2} = 1,75\ UA$$

(f) Mais uma vez, observa-se a configuração do problema:



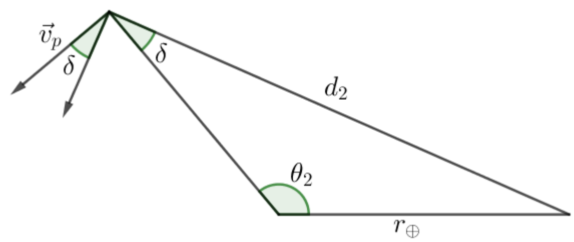
Encontra-se o movimento próprio μ na situação descrita ao determinar a componente transversal da velocidade do cometa em relação à Terra e dividir pela distância entre tais corpos. Isto é:

$$\mu = \frac{v_{c(\oplus),transversal}}{d_2}$$

Determina-se $v_{c(\oplus)}$ trocando de referencial, do Sol, o qual já se sabe a velocidade v_p de antes, para o referencial da Terra, ou seja:

$$\vec{v}_{c(\oplus)} = \vec{v}_p - \vec{v}_\oplus$$

Apenas as componentes transversais dos vetores acima são de interesse, então vamos encontrá-las. A velocidade da Terra já é ortogonal à direção do cometa, basta analisarmos o caso de $\vec{v}_p$:



$$v_{p,trans} = v_p \cdot \cos\delta$$

$$\frac{\sin(\delta)}{r_\oplus} = \frac{\sin(\theta_2)}{d_2} \implies \delta = \arcsin\left(\sin(\theta_2) \cdot \frac{r_\oplus}{d_2}\right)$$

$$\delta = 25,96^\circ \implies$$

$$v_{p,trans} = 39,173\ km/s$$

Como o ângulo entre as órbitas do cometa e da Terra é aproximadamente 90°, então $\vec{v}_{p,trans}$ e $\vec{v}_\oplus$ também são ortogonais e o módulo de $\vec{v}_{c(\oplus),trans}$ é simplesmente $v_{c(\oplus),trans} = \sqrt{v_{p,trans}^2 + v_\oplus^2}$

$$v_\oplus = \frac{2\pi r_\oplus}{P_\oplus} = 29,785\ km/s$$

Assim, substituindo os valores:

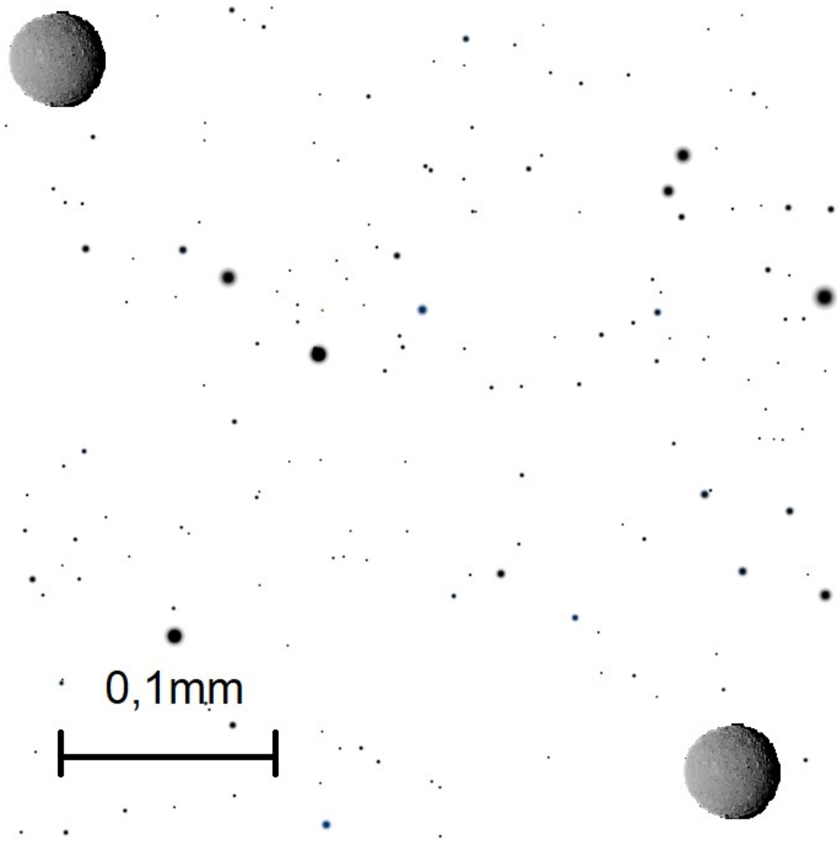
$$v_{c(\oplus),trans} = 49,210\ km/s$$

Por fim, teremos:

$$\mu = \frac{49,210\ km/s}{d_2} = 1,880 \cdot 10^{-7}\ rad/s$$

$$\mu = 140\ ''/h$$

10. **(70 pontos)** Numa noite em que Ceres estava em seu periélio e em oposição em relação ao Sol, o jovem astrônomo Tiago decide tirar fotos do planeta anão e, para isso, ele conta com seu telescópio, que possui diâmetro 883 mm e razão focal $f/12$. A montagem equatorial do instrumento conta com um motor que acompanha o movimento diurno das estrelas. O astrônomo tirou duas fotos separadas por um intervalo $\Delta t = 16,1\ min$ e elas foram sobrepostas para obter a imagem abaixo:



A partir dos dados acima, calcule:

(a) **(5 pontos)** A escala de placa do telescópio em $''/mm$;

Além disso, Tiago toma nota de algumas características do planeta anão: sua magnitude aparente $m = 6,40$ e seu albedo geométrico $p = 0,0900$.

Considere que o fluxo de Ceres na Terra na configuração de oposição é dado por:

$$F = p \cdot \frac{P}{\pi r^2}$$

Onde P é a potência solar incidente no planetoide e r é sua distância até à Terra. A partir desses dados e sabendo que o sentido da translação do corpo celeste é o mesmo que o da Terra e que as órbitas são coplanares, calcule, para Ceres.

(b) **(18 pontos)** A sua distância ao Sol nessa ocasião em UA;

(c) **(5 pontos)** O seu raio em km;

(d) **(6 pontos)** A sua velocidade angular para um observador na Terra em $''/h$;

(e) **(13 pontos)** O semieixo maior da sua órbita em UA;

(f) **(3 pontos)** A excentricidade da sua órbita;

Empolgado, o garoto mostra suas descobertas ao seu amigo Luiz, que decide explorar mais a fundo o corpo celeste e, para isso, envia uma sonda ao pequeno planeta. Quando ela chega ao seu destino, o aparelho adquire uma órbita circular cujo raio é o dobro do raio de Ceres. Em seguida, ele se certifica de impulsioná-lo de modo que sua velocidade tangencial seja nula em relação ao centro do planeta anão. A partir disso, a sonda começa um processo de queda livre até colidir com a superfície do planetoide. Sabendo que este processo durou $58,7$ min, calcule:

(g) **(15 pontos)** A massa de Ceres em kg;

(h) **(5 pontos)** O incremento de velocidade, em m/s, necessário para que a sonda inicie a trajetória em queda.

Solução:

(a) Primeiramente, precisamos descobrir a distância focal f do telescópio:

$$\frac{f}{12} = D$$

$$f = 10596 \text{ mm}$$

A escala de placa, s, pode ser encontrada a partir da seguinte fórmula:

$$s \ ("/mm) = \frac{206265}{f \ (mm)}$$

Onde usamos $206\,265'' = 1$ rad, logo:

$$\implies \boxed{s = 19.5''/\text{mm}}$$

(b) Utilizando a foto dada, podemos calcular o raio angular de ceres, θ_R. Na imagem, obtemos que o diâmetro de Ceres é aproximadamente $0,0438$ mm e, utilizando a escala de placa, temos:

$$\theta_R = \frac{0,0438 \cdot 19.5''}{2} \implies \theta_R \approx 2,0668 \cdot 10^{-6} \ rad$$

Com a representação abaixo:

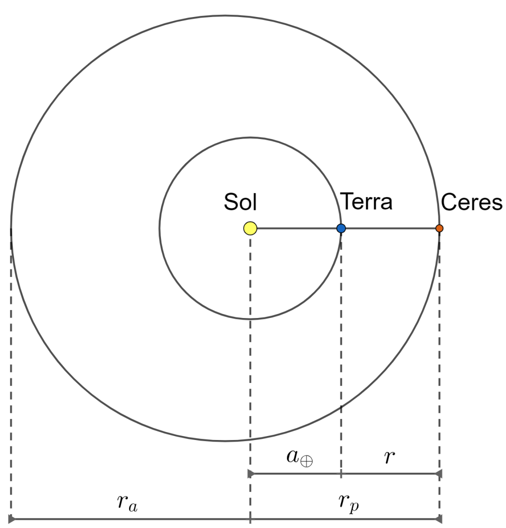


Figura 4

Podemos calcular o raio, R, de Ceres por:

$$R = \theta_R \cdot r$$

Assim, podemos calcular o fluxo, F, da energia solar refletida por Ceres por:

$$F = p \cdot \frac{P}{\pi r^2} = \frac{F_{\odot} \pi R^2 p}{\pi r^2}$$

Sendo $F_{\odot}$ o fluxo do Sol que chega ao planeta anão.

$$F = \frac{L_{\odot}}{4\pi r_p^2} \cdot \frac{\pi \theta_R^2 r^2 p}{\pi r^2}$$

$$F = \frac{L_{\odot} \theta_R^2 p}{4\pi r_p^2}$$

A partir disso, utilizando a magnitude aparente do Sol ($m_{\odot}$):

$$m_{\odot} - m = -2,5 \log \left(\frac{L_{\odot}}{4\pi a_{\oplus}^2} \cdot \frac{4\pi r_p^2}{L_{\odot} \theta_R^2 p} \right)$$

$$r_p = a_{\oplus} \theta_R \sqrt{p} \cdot 10^{\frac{m - m_{\odot}}{5}}$$

$$\boxed{r_p = 2,58\ U.A.}$$

(c) A distância da Terra até Ceres, como Ceres está em oposição, é:

$$r = r_p - a_{\oplus} = 1,585 \text{ U.A.}$$

Assim, usando o ângulo calculado anteriormente:

$$R = \theta_R r$$

Portanto:

$$\boxed{R = 490 \text{ km}}$$

(d) Medindo o deslocamento na placa fotográfica, obtemos $0,458$ mm. Como no item anterior, transformando isso em deslocamento angular:

$$\theta_d = 0,458 \cdot s = 8.92''$$

Com isso, a velocidade angular é:

$$\omega = \frac{\theta_d}{\Delta t}$$

$$\boxed{\omega = 33.2''/\text{h}}$$

(e) Utilizando a imagem abaixo e calculando a velocidade relativa de Ceres, obtemos:

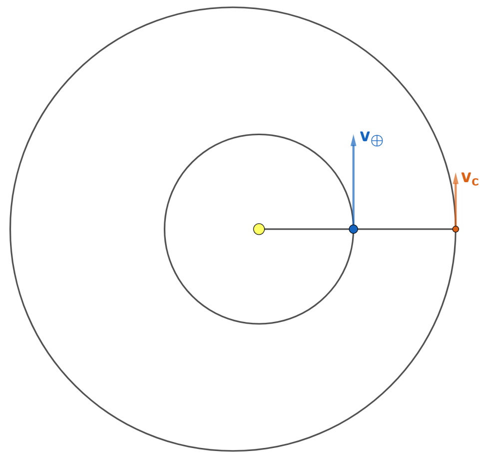


Figura 5

$$v_c = v_\oplus - \omega \cdot r$$

Substituindo a fórmula das velocidades:

$$\sqrt{GM_\odot\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} = \sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} - \omega \cdot r$$

Isolando o a:

$$a = \left(\frac{2}{r_p} - \frac{\left(\sqrt{\frac{GM_\odot}{a_\oplus}} - \omega \cdot r\right)^2}{GM_\odot}\right)^{-1}$$

$$\boxed{a = 2,78\ U.A.}$$

(f) Sabendo a distância entre o Sol e Ceres no seu periélio e o semieixo maior de sua órbita, podemos utilizar a equação abaixo:

$$r_p = a(1 - e)$$

Isolando o e:

$$e = 1 - \frac{r_p}{a}$$

$$\boxed{e = 0,0715}$$

(g) Podemos considerar a trajetória percorrida pela sonda como uma elipse degenerada com $a = R$ e $b \to 0$, como pode ser verificado na figura abaixo:

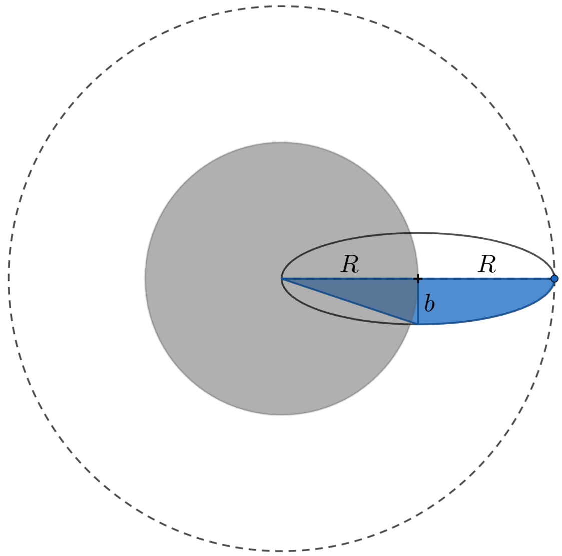


Figura 6: Em que a área percorrida pelo raio-vetor da sonda durante a queda à superfície do planetoide é dada em azul

Podemos calcular essa área pela soma da do triângulo retângulo com catetos a e b e do setor elíptico que representa 1/4 da área total:

$$A = \frac{ab}{2} + \frac{\pi ab}{4}$$

Pela Segunda Lei de Kepler, temos que:

$$\frac{A}{\pi ab} = \frac{\Delta T}{T}$$

E, pela Terceira Lei de Kepler:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Longrightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}}$$

Portanto:

$$\frac{\Delta T}{2\pi}\sqrt{\frac{GM}{R^3}} = \frac{2+\pi}{4\pi}$$

$$M = \frac{R^3}{G} \cdot \left(\frac{2+\pi}{2\Delta T}\right)^2$$

$$\boxed{M = 9,40 \cdot 10^{20}\ kg}$$

(h) Representação da situação:

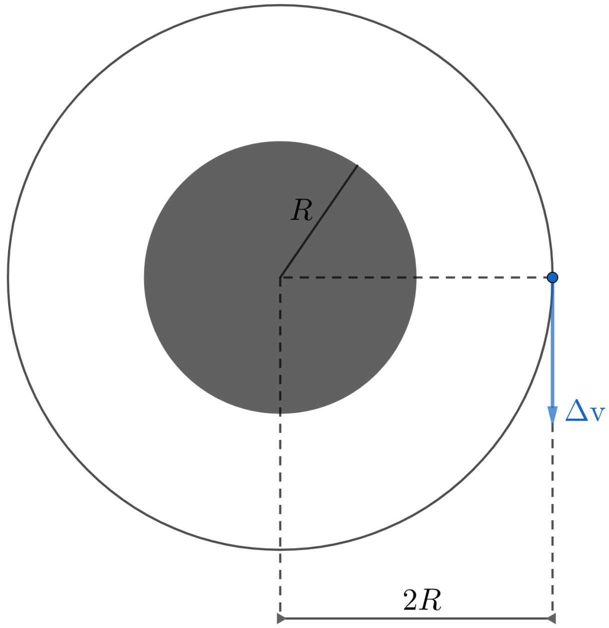


Figura 7

Para que a velocidade total seja nula após o impulso:

$$\Delta v = \sqrt{\frac{GM}{2R}}$$

$$\boxed{\Delta v = 253\ m/s}$$