Instruções

1. A prova teórica terá 5 horas de duração e vale um total de 300 pontos.

2. Serão entregues **Folhas de Respostas** para o desenvolvimento do seu trabalho. Em cada **Folha de Resposta**, escreva as seguintes informações:

- Código do Estudante
- Número da questão
- Número da página e número total de páginas

3. Comece cada questão em uma nova Folha de Resposta. Por favor, escreva apenas no lado impresso da folha. Não use o verso da folha. Se você escreveu algum desenvolvimento que você não quer que seja considerado, marque a folha com um "X" no trecho a ser ignorado.

4. Lembre-se que os avaliadores podem não entender a sua língua. Sempre que possível, escreva suas soluções usando apenas expressões matemáticas e números. Se necessário explicar alguma coisa em palavras, procure usar frases curtas (se possível, em inglês).

5. Você não está autorizado a sair de sua mesa sem permissão. Caso precise de ajuda (calculadora com defeito, ida ao banheiro, mais Folhas de Respostas etc.), levante a sua mão para chamar a atenção do fiscal.

6. O início e o fim da prova serão sinalizados por um longo sinal sonoro. Além disso, um sinal curto será emitido quando faltarem quinze minutos para o final da prova.

7. No final da prova você deve parar de escrever imediatamente. Separe e coloque suas folhas em pilhas separadas,

(a) Pilha 1: Folhas de Respostas da Parte 1
(b) Pilha 2: Folhas de Respostas da Parte 2
(c) Pilha 3: Folhas de Respostas da Parte 3
(d) Pilha 4: Folhas de perguntas e demais folhas que você não deseja que sejam avaliadas.

8. Espere em sua mesa até que o seu envelope seja coletado. Uma vez que todos os envelopes forem recolhidos, seu guia irá acompanha-lo para fora da sala de provas.

9. Uma lista de constantes para esta prova é fornecida na próxima página.

Distribuição de Pontos desta prova

Número da Questão	Pontos
T1	10
T2	10
T3	10
T4	10
T5	10
T6	25
T7	25
T8	25
T9	25
T10	75
T11	75
Total	300

Tabela de Constantes

Massa ($M_\oplus$)	$5{,}98 \times 10^{24}$ kg	**Terra**
Raio ($R_\oplus$)	$6{,}38 \times 10^{6}$ m	
Aceleração gravitacional (g)	$9{,}81$ m s^{-2}	
Obliquidade da Eclíptica	23°27’	
Duração do Ano Tropical	365,2422 dias solares médios	
Duração do Ano Sideral	365,2564 dias solares médios	
Albedo	0,39	
Massa ($M_☾$)	$7{,}35 \times 10^{22}$ kg	**Lua**
Raio ($R_☾$)	$1{,}74 \times 10^{6}$ m	
Distância media Terra-Lua	$3{,}84 \times 10^{8}$ m	
Inclinação da órbita em relação à Eclíptica	5,14°	
Albedo	0,14	
Magnitude aparente (lua cheia media)	$-12{,}74$	
Massa ($M_\odot$)	$1{,}99 \times 10^{30}$ kg	**Sol**
Raio ($R_\odot$)	$6{,}96 \times 10^{8}$ m	
Luminosidade ($L_\odot$)	$3{,}83 \times 10^{26}$ W	
Magnitude Absoluta	4,80 mag	
Temperatura Superficial	5772 K	
Diâmetro angular visto da Terra	30’	
Velocidade Orbital na Galáxia	220 km s^{-1}	
Distância ao Centro Galáctico	8,5 kpc	
1 U.A.	$1{,}50 \times 10^{11}$ m	**Constantes Físicas**
1 pc	206265 U.A.	
Constante Gravitacional (G)	$6{,}67 \times 10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}	
Constante de Planck (h)	$6{,}62 \times 10^{-34}$ J s	
Constante de Boltzmann (k_B)	$1{,}38 \times 10^{-23}$ J K^{-1}	
Constante de Stefan-Boltzmann (σ)	$5{,}67 \times 10^{-8}$ W m^{-2} K^{-4}	
Constante de Hubble (H_0)	67,8 km s^{-1} Mpc^{-1}	
Velocidade da luz no vácuo (c)	299792458 m s^{-1}	
Permeabilidade Magnética no vácuo (μ_0)	$4\pi \times 10^{-7}$ H m^{-1}	
1 Jansky (Jy)	10^{-26} W m^{-2} Hz^{-1}	

A Lei de Rayleigh-Jeans é dada por $B_\nu = \frac{2k_BT}{c^2}\nu^2$, que é a potência emitida por unidade área, por esterradiano, por unidade de frequência.

(T1) Galáxias Superluminais **(10 pontos)**

Leia as afirmações abaixo e indique se são verdadeiras (T) ou falsas (F):

(a) Para algumas galáxias a velocidade aparente de recessão excede a velocidade da luz.

(b) A relação Velocidade-Distância dada por Hubble não permite que as velocidades de recessão excedam a velocidade da luz.

(c) A lei de Hubble-Lemaitre (conhecida antigamente como lei de Hubble) não viola a relatividade especial.

(d) Se algumas galáxias tivessem uma velocidade aparente de recessão excedendo a velocidade da luz, então os fótons dessas galáxias nunca chegariam até nós.

(e) À medida que a expansão do Universo vai acelerando, os fótons emitidos agora por galáxias que têm velocidades aparentes de recessão iguais à velocidade da luz nunca chegarão até nós.

(T2) Distância **(10 pontos)**

Um observador mediu as paralaxes trigonométricas de estrelas em um aglomerado estelar. Devido a erros aleatórios, os valores de paralaxe medidos estão distribuídos simetricamente em torno do valor esperado, com desvio padrão igual a 0,05 mas (milissegundo de arco). Suponha que não haja erros sistemáticos e suponha que todas as estrelas no referido aglomerado tenham a mesma luminosidade. Sabe-se que a distância deste aglomerado até nós é $R = 5$ kpc.

Ele deu uma tabela de dados para 4 de seus alunos (A, B, C e D) e eles estimaram as distância até o aglomerado das seguintes maneiras:

A. Convertendo cada medida de paralaxe em distância e, então, achando a distância média (R_A);

B. Tomando, primeiro, a média de todas as paralaxes e, em seguida, convertendo a paralaxe média em distância (R_B);

C. Convertendo cada medida de paralaxe em distância e, então, tomado o valor da mediana das distâncias (R_C);

D. Encontrando o valor da mediana das paralaxes e, em seguida, convertendo o valor da mediana em distância (R_D).

Indique se as afirmações a seguir são verdadeiras (T) ou falsas (F). **No caso de uma determinada relação matemática ser falsa, dê a relação correta**.

(l) Se a i-ésima estrela dá o menor valor da paralaxe e a j-ésima estrela dá o maior valor da paralaxe, muito provavelmente $R_i – R > R – R_j$;

(m) $R_A = R$ (ou seja, há uma grande probabilidade de que a distância estimada por A praticamente coincide com a distância verdadeira);

(n) $R_B = R$ (ou seja, há uma grande probabilidade de que a distância estimada por B praticamente coincide com a distância verdadeira);

(o) $R_C < R$ (ou seja, há uma grande probabilidade de que a distância estimada por C seja sistematicamente menor do que a distância verdadeira).

(p) $R_D = R$ (ou seja, há uma grande probabilidade de que a distância estimada por D praticamente coincide com a distância verdadeira).

(T3) Refração Atmosférica **(10 pontos)**

Considere o nascer do Sol em Pequim (φ = 40°) no dia do Equinócio Vernal.

(a) Seja r_l, r_d, r_r e r_u as distâncias do centro do disco não distorcido do Sol até a borda do disco nas direções esquerda (l), para baixo (d), direita (r) e para cima (u), respectivamente. Qual será a relação hierárquica (<, =, >) entre os quatro raios logo após o nascer do Sol?

(b) Qual é a correção no momento da ascensão da borda superior do disco em comparação com o caso sem atmosfera? Considere que, tipicamente, a refração atmosférica perto do horizonte é 35'. Por favor, considere apenas o movimento diurno aparente.

(T4) Altura de uma colina **(10 pontos)**

Dois amigos quiseram medir a altura de uma colina ao lado de sua vila (latitude φ = 40°). Um dos amigos subiu para o topo da colina e ela combinou de enviar um sinal de luminoso para o seu amigo na aldeia, logo que ela visse o pôr do Sol. Em 21 de março, quando eles fizeram essa experiência, o amigo na aldeia recebeu o sinal luminoso 4,1 minutos após o pôr do Sol na aldeia. Estime a altura da colina e a distância do horizonte até a pessoa no topo da colina. Despreze a refração atmosférica.

(T5) Tempo Sideral **(10 pontos)**

É muito interessante observar que em um determinado dia do calendário a cada ano, teremos duas vezes o Tempo Sideral Médio 00:00:00.

(a) Qual será a ascensão reta aproximada do Sol quando esse evento acontecer?

(b) Determine a data, em 2018, desse evento.

Considere que no Observatório Real de Greenwich o Tempo Sideral Médio GMST0 era 6,706 h às 0h de 1º de janeiro de 2018 (JD 2458119,5).

(T6) Observando o Sol com FAST **(25 pontos)**

O *Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope* (FAST) é um rádiotelescópio de prato único localizado na província de Guizhou, na China. O diâmetro físico do prato é de 500 m, mas durante as observações, o diâmetro efetivo da área coletora é de 300 m.

Considere observações da emissão térmica em rádio da fotosfera do Sol em 3,0 GHz com esse telescópio e um receptor com largura de banda 0,3 GHz.

(a) Calcule a energia total ($E_\odot$) que o receptor coletará durante 1 hora de observação.

(b) Estime a energia necessária para virar uma página de sua folha de resposta (E'). Dica: a densidade superficial típica do papel é 80 g m^{-2}).

(c) Qual dessas energias é maior?

(T7) Mancha Solar **(25 pontos)**

Campos magnéticos são importantes na física das estrelas e das manchas solares. Em primeira aproximação, podemos modelar a fotosfera do Sol consistindo de um plasma, que pode ser tratado simplesmente como um gás ideal de componente único, e um campo magnético (**B**), que tem uma pressão magnética associada $p_B = \frac{B^2}{2\mu_0}$. Ela se comporta como qualquer outra pressão física, exceto que ela é devida ao campo magnético, ao invés da energia cinética das partículas.

Suponha que a densidade numérica de partículas na fotosfera seja constante em todos os lugares, mas o campo magnético dentro de uma mancha solar (B_{in} = 0,1 T) é muito mais forte do que fora dela ($B_{out} = 5 \times 10^{-3}$ T). Do espectro do corpo negro, a temperatura dentro da mancha solar é T_{in} ~ 4000 K, enquanto a temperatura do exterior é T_{out} ~ 6000 K (o que é a razão das manchas solares parecerem mais escuras). Para uma mancha solar ser estável seu interior deve estar em equilíbrio com o exterior.

(a) Estime a densidade numérica das partículas do plasma na fotosfera solar.

(b) Compare a sua resposta com uma estimativa da densidade numérica das partículas da atmosfera na superfície da Terra.

(T8) Uma Galáxia Possivelmente Deficiente em Matéria Escura **(25 pontos)**

No início deste ano, uma equipe de astrônomos anunciou a descoberta de uma galáxia com muito menos matéria escura do que o previsto por modelos de evolução galática (van Dokkum *et al.* 2018, Nature). Esta galáxia, chamada NGC 1052-DF2, parece estar próxima à galáxia elíptica NGC 1052 (D = 20 Mpc do Sol). A forma de NGC 1052-DF2 lembra uma elipse de semi-eixo maior *a* = 22,6" e $\frac{b}{a} = 0{,}85$. Metade de toda a luz da galáxia vem dessa elipse, que possui brilho superficial médio de 24,7 mag arcsec^{-2}.

(a) Calcule a magnitude aparente total desta galáxia.

(b) A equipe sugeriu que esta galáxia é uma companheira de NGC 1052. Estime a massa total das estrelas de NGC 1052-DF2, assumindo que sua razão massa-luminosidade $\left(\frac{M/M_\odot}{L/L_\odot}\right)$ é 2,0.

(c) A equipe identificou 10 aglomerados globulares em NGC 1052-DF2 com distância galactocêntrica média de 78,4". Foi medida também a dispersão de velocidade desses aglomerados como sendo inferior a 8,4 km/s. Estime a massa dinâmica da galáxia. Para simplificar, considere que a distribuição de massa nas galáxias é uniforme e esfericamente simétrica.

(d) Esta descoberta foi contestada por outros grupos (Kroupa *et al.*, Nature, 2018, Truijlo *et al.*, MNRAS, 2018), que afirmam que NGC 1052-DF2 não é satélite de NGC 1052, e que estaria localizada muito mais próxima de nós. Mostre porque uma distância menor enfraqueceria a hipótese de NGC 1052-DF2 ser deficiente em matéria escura.

(T9) Rádio Galáxia **(25 pontos)**

Um observador planeja utilizar o *Five-hundred-meter Aperture Spherical radio Telescope* (FAST) na China para observar uma rádio galáxia com *redshift* $z = 0{,}06$. Considere que a fonte rádio é compacta e muito menor que o feixe do telescópio nas frequências observadas, i.e., a fonte é pontual quando observada com este telescópio. Para que uma fonte seja detectada pelo FAST em observações de uma única polarização, ela precisa ser forte (brilhante) o suficiente em relação ao nível de ruído σ, que por sua vez depende da largura de banda $\Delta\nu$, e do tempo de integração (equivalente em rádio ao tempo de exposição) t_i, de acordo com a relação:

$$\sigma = \frac{2k_B T_{sys}}{A_e\sqrt{t_i \Delta\nu}}$$

onde T_{sys} é a temperatura do sistema (aproximadamente 150 K na faixa de frequências de 0,28 GHz a 0,56 GHz e 25 K na faixa de frequências de 1,05 GHz a 1,45 GHz), e A_e = 4,6×10^4 m^2 é a área efetiva do telescópio, já levando em conta a eficiência total do instrumento.

A rádio galáxia possui uma densidade de fluxo no contínuo de $f_\nu = 2{,}5 \times 10^{-3} Jy$ quando observada na frequência de 0,4 GHz. A largura de banda $\Delta\upsilon$ para observações no contínuo em 0,4 GHz é de 2,8×10^8 Hz.

(a) Qual o tempo de integração t_i necessário para se detectar uma densidade de fluxo no contínuo em 0,4 GHz com razão sinal-ruído de 30 (também chamada de detecção 30σ)?

(b) Queremos procurar por hidrogênio neutro (HI) nessa galáxia usando a linha de absorção de 21 cm, cuja frequência de repouso é 1,4204 GHz. Calcule a frequência observada υ_{obs} dessa linha de HI para esta galáxia.

(c) A emissão contínua em rádio dessa galáxia pode ser descrita por uma lei de potência do tipo $f_\nu \sim \nu^\alpha$, com índice espectral $\alpha = -0{,}2$. Calcule a densidade de fluxo no contínuo em ν_{obs} para a galáxia.

(d) A largura da linha HI em 21 cm é de 90 km s^{-1}. Calcule a largura dessa linha, em Hz, na frequência observada ν_{obs}. De acordo com a Figura 1, a linha do HI em 21 cm absorve em média 4% da densidade de fluxo no contínuo ao longo da largura de linha de 90 km s^{-1}. Qual deve ser o tempo de integração para que se consiga detectar esta linha com razão sinal-ruído ≥ 3σ em três canais consecutivos de largura de banda 30 km s^{-1}?

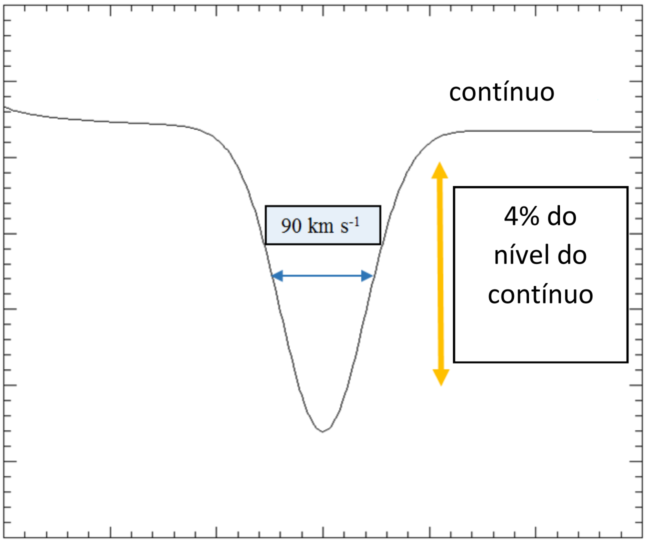

Figura 1: Espectro da linha de 21 cm do HI em absorção relativa à emissão do contínuo da rádio galáxia

(T10) Vega e Altair **(75 pontos)**

Numa tradicional lenda chinesa sobre o amor, Vega e Altair são dois amantes que se encontram uma vez por ano em uma ponte, feita de pássaros, sobre a Via Láctea. A tabela abaixo mostra alguns parâmetros das duas estrelas. Para esta questão, considere que o sistema de coordenadas é fixo (i.e. não é afetado pela precessão ou pelo movimento do Sol).

Estrela	Ascensão Reta (J2000,0)	Declinação (J2000,0)	Paralaxe (mas)	Movimento Próprio		Velocidade Radial (km s^{-1})
				μ_α cosδ (mas/ano)	μ_δ (mas/ano)	
Vega	$18^h36^m56{,}49^s$	+38° 47' 07,7"	130,23	+200,94	286,23	-13,9
Altair	$19^h50^m47{,}70^s$	+8° 52' 13,3"	194,95	+536,23	385,29	-26,1

Com base nessas informações, responda as perguntas abaixo:

(a) (9 pontos) Qual a separação angular entre as duas estrelas?

(b) (6 pontos) Calcule a distância (em parsecs) entre Vega e Altair.

(c) (3 pontos) Calcule os ângulos de posição dos vetores de movimento próprio para cada uma das estrelas.

Para os itens d-g, considere que a velocidade angular das estrelas na esfera celeste é sempre constante. Esta hipótese é apenas uma simplificação, e não é fisicamente possível.

(d) (2 pontos) Quantos pontos em comum na esfera celeste que podem ser atingidos por essas estrelas?

(e) (20 pontos) Encontre as coordenadas do ponto em comum mais próximo.

(Dica: Faça um esboço da esfera celeste para visualizar a situação)

(f) (8 pontos) Encontre em que ano cada uma das estrelas passou/passará por este ponto.

(g) (5 pontos) Quando Altair estava (ou estiver) neste ponto, qual será sua distância angular até Vega?

(h) (22 pontos) Encontre as coordenadas dos pontos (se existirem) no espaço tridimensional que foram ou serão visitados por ambas as estrelas. Inclua os dados de velocidade radial nestes cálculos.

(T11) História Térmica do Universo **(75 pontos)**

A partir das equações da relatividade geral de Einstein, o físico russo Alexander Friedmann elaborou a Equação de Friedmann, que descreve a dinâmica de um Universo homogêneo e isotrópico. A equação de Friedmann é expressa através da relação:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_m + \rho_r) + \frac{\Lambda c^2}{3} - \frac{kc^2}{a^2}$$

Definimos o parâmetro de Hubble como $H = \frac{\dot{a}}{a}$, onde a é o fator de escala e $\dot{a}$ é a taxa de variação do fator de escala em relação ao tempo. Portanto, o parâmetro de Hubble é uma função do tempo cósmico. Na equação de Friedmann, ρ_m é a densidade de matéria, incluindo matéria escura e bárions; ρ_r é a densidade de radiação; Λ é a constante cosmológica; e k é a curvatura do espaço. O índice 0 indica o valor de uma determinada constante física no momento atual; por exemplo, H_0 é o valor atual do parâmetro de Hubble. Além disso, para evitar confusões com o parâmetro de Hubble reduzido, utilizaremos a constante de Planck reduzida $\hbar = h/2\pi$ ao invés da constante de Planck h.

(a) (5 pontos) Quais as dimensões do parâmetro de Hubble? Podemos definir a escala de tempo característica da expansão do Universo (i.e. o tempo de Hubble t_H) usando o parâmetro de Hubble. Calcule o valor atual do tempo de Hubble t_{H0}.

(b) (5 pontos) Vamos definir a densidade crítica ρ_c como a densidade de matéria necessária para se explicar a expansão de um universo plano sem radiação ou energia escura. Encontre a expressão para esta densidade crítica em termos de H e G. Calcule o valor atual da densidade crítica ρ_{c0}.

(c) (6 pontos) É conveniente expressar os parâmetros de densidade de uma forma adimensional como $\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c}$, i.e. a razão entre a densidade e a densidade crítica. A equação de Friedmann pode ser reescrita usando os parâmetros adimensionais de densidade de maneira que $\Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k = 1$.

Use esta informação para encontrar as expressões para Ω_Λ e Ω_k, em termos H, c, Λ, k e a.

(d) (7 pontos) Uma outra equação que é válida para matéria, radiação e energia escura é a Equação do Fluido: $\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0$, onde p é a pressão de um componente, ρ sua densidade e $\dot{\rho}$ a taxa de variação da densidade com o tempo. A Radiação é composta de fótons e neutrinos sem massa, ambos viajando à velocidade da luz. A pressão exercida por essas partículas é 1/3 da sua densidade de energia. Mostre que a densidade de radiação $\rho_r \propto (1+z)^4$, onde z é o *redshift* cosmológico. Dica: se $\frac{\dot{\rho}}{\rho} = n\,\frac{\dot{a}}{a}$, então $\rho \propto a^n$.

(e) (4 pontos) Sabemos que o valor da constante cosmológica Λ não muda com o tempo. Sua equação de estado é da forma $p = w\rho_\Lambda c^2$, onde w é um número inteiro. Encontre o valor de w.

(f) (13 pontos) O tempo de Planck é uma escala de tempo característica, que indica o instante em que as leis físicas atuais não são mais válidas, sendo necessária uma teoria quântica da gravitação. A expressão para o tempo de Planck pode ser escrita em termos de $\hbar$, G, c, e um coeficiente adimensional que, para unidades em SI, é aproximadamente 1. Usando análise dimensional, encontre a expressão para o tempo de Planck e estime seu valor.

(g) (7 pontos) O comprimento de Planck, que está associado ao tempo de Planck, é dado por $l_P = ct_P$. A massa mínima de um buraco negro, também chamada de massa de Planck, é definida como a massa de um buraco negro cujo raio de Schwarzschild é o dobro do comprimento de Planck.

Encontre a expressão para a massa de Planck M_P e calcule $M_P c^2$ em GeV. Esta massa é considerada o limite superior para as partículas elementares, além do qual colapsariam em um buraco negro.

(h) (4 pontos) Bem no início do Universo, logo após o tempo de Planck, todas as partículas estavam em equilíbrio térmico em uma sopa primordial. À medida que a temperatura diminui, as partículas vão se desacoplando da sopa primordial, se libertam e passam a viajar livres pelo Universo. Os fótons se desacoplaram cerca de 300 mil anos após o Big Bang. Os fótons emitidos nesta época constituem o que chamamos de Radiação Cósmica de Fundo (CMB, em inglês), que tem distribuição de energia de corpo negro descrita pela Lei de Stefan-Boltzmann:

$$\varepsilon_r = \frac{\pi^2}{15\hbar^3 c^3}(k_B T)^4$$

Mostre que a temperatura da CMB segue a relação $T/(1+z) = constante$.

(i) (16 pontos) Com a expansão do Universo, a densidade de radiação diminuiu mais rapidamente que a densidade de matéria, e em algum momento as densidades de matéria e radiação estiveram iguais. Considere radiação como fótons e neutrinos. Além dos fótons, os neutrinos contribuem com 68% da densidade de energia de radiação (i.e. $\Omega_{r0} = 1{,}68\,\Omega_{\gamma 0}$, onde γ indica fótons). Estime o *redshift* z_{eq} do momento em que matéria e radiação tinham densidades iguais em termos de Ω_{m0} e do parâmetro de Hubble reduzido $h = \frac{H_0}{100km\,s^{-1}Mpc^{-1}}$. Considere que a temperatura atual da CMB é $T_0 = 2{,}73\ K$.

(j) (8 pontos) Os neutrinos se desacoplaram da sopa primordial quando a temperatura do Universo era cerca de 1 MeV. Nessa época, a densidade de radiação do Universo era muito maior que a dos outros componentes. Estime o instante ($t = \frac{1}{2H}$) em que os neutrinos se desacoplaram, expressando-o em segundos após o Big Bang.