OLIMPÍADA BRASILEIRA DE ASTRONOMIA E ASTRONÁUTICA

PROVA PRESENCIAL – TEÓRICA P1

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

IX IOAA e VII OLAA de 2015

Nota Final _____

Escreva aqui a sua identificação:

Instruções

- Escreva a sua identificação em **TODAS** as folhas de respostas;
- A duração da prova é de 4 (quatro) horas;
- Essa prova vale 10 pontos e seu peso para média final é igual 4;
- Cada questão vale 2 pontos;
- A prova é individual e sem consultas;
- O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
- Não é permitido o uso de celulares ou similares;
- Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica será disponibilizada para todos os estudantes;
- Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas;
- Folhas de rascunho serão disponibilizadas;
- Os cálculos na solução de cada questão são obrigatórios! Eles podem ser feitos a lápis, mas a resposta final deverá ser a caneta. Às respostas ainda que corretas, mas sem o desenvolvimento, serão associadas a nota zero.
- Ao final da prova devolva esse caderno de questões e as folhas de respostas.

Questão	Nota
1	
2	
3	
4	
5	
TOTAL	

Questão 1:

Uma situação inesperada ocorre quando um astronauta se desgarra de um satélite artificial da Terra pelo rompimento do "cordão umbilical" que o liga ao satélite durante missão externa. Uma pane momentânea nos sistemas eletrônicos do satélite complica a situação e impede qualquer ação imediata da tripulação para salvamento do astronauta.

Nesse instante o astronauta aciona seu equipamento de propulsão, que ainda tem combustível para impulsioná-lo rapidamente a uma velocidade de 10 m/s, em direção radial ao satélite.

Queremos saber se o astronauta conseguirá alcançar o satélite para tentar fazer uma ancoragem provisória nessas condições.

Seguem alguns dados relativos ao problema:

- Raio da Terra: 6.380 km;
- Altura do satélite em relação à Terra: 400 km;
- Período da órbita do satélite: 92 min 24seg.
- A altura do astronauta em relação à Terra (sua órbita) no momento da ruptura do cabo corresponde a um aumento em seu período orbital de 0,12 s em relação ao período anterior, o do satélite em que estava.

Obs. O satélite é um cilindro de 12 m de comprimento e 2,5 m de diâmetro e tem seu eixo contido na trajetória. No momento proposto no problema o astronauta se encontra na vertical que passa pelo ponto médio do corpo do satélite, portanto, você deverá levar em conta a composição diferencial de sua velocidade orbital em relação à do satélite para verificar um possível encontro.

Desenvolva os seguintes cálculos:

1. Use a 3ª.Lei de Kepler para encontrar a relação entre a mudança de período (ΔP) causada por uma mudança radial de distância (Δa) de um corpo (satélite artificial) que orbita outro (Terra), considerando ΔP e Δa numericamente muito pequenos comparados com **P** e **a**. Use isso para encontrar o afastamento do astronauta em relação ao satélite, depois do rompimento do cabo.
2. Calcule as velocidades tangenciais do satélite e do astronauta (utilize três casas decimais);
3. Verifique de quanto será o desvio, em relação ao meio do satélite, quando o astronauta conseguir alcançar a órbita do satélite, e se, nesse caso, ele poderia se ancorar nele.

RESPOSTAS:

1 . Vamos fazer a mesma dedução usada na 3ª prova online dessas seletivas 2015, para calcular a mudança de período ΔP causada por uma mudança radial de distância Δa de um corpo que orbita outro, quando essas mudanças (ΔP e Δa) são numericamente muito pequenos comparados com o período "**P**" e distância "**a**".

Pela 3a. Lei de Kepler: $P_{final}^2/a_{final}^3 = P^2/a^3$

Mas $P_{final} = P + \Delta P$ e $a_{final} = a + \Delta a$

Então $(P + \Delta P)^2/(a + \Delta a)^3 = P^2/a^3$

Fazendoo o quadrado da soma $(P + \Delta P)$ e o cubo da soma $(a + \Delta a)$ e já arrumando os termos em "P" de um lado e os termo com "a" do outro lado, temos:

$(P^2 + 2P\Delta P + \Delta P^2)/P^2 = (a^3 + 3a^2\Delta a + 3a\Delta a^2 + \Delta a^3)/a^3 \Rightarrow$

$P^2/P^2 + 2P\Delta P/P^2 + \Delta P^2/P^2 = a^3/a^3 + 3a^2\Delta a/a^3 + 3a\Delta a^2/a^3 + \Delta a^3/a^3$

$1 + 2\Delta P/P + \Delta P^2/P^2 = 1 + 3\Delta a/a + 3\Delta a^2/a^2 + \Delta a^3/a^3$

Como $\Delta a << a$ e $\Delta P << P$ então $\Delta P/P$ e $\Delta a/a$ serão bem menores que 1. Nesse caso, nós podemos desprezar os termos elevaos ao quadrado e ao cubo que serão <<1. Ficamos com:

$2\Delta P/P = 3\Delta a/a \Rightarrow \Delta P = [\ 3/2\ (\Delta a/a)\ ].P$ ou $\Delta a = [\ 2/3\ (\Delta P/P)\ ].a$

No nosso caso é dado do problema que ΔP= 0,12s e que o raio da órbita do satélite será (6380+400)km. Levando isso na dedução que acabamos de fazer, obtemos Δa=100m.

2 - Como o astronauta está mais afastado em relação à Terra, sua órbita terá 6.780.100 m de raio (semi-eixo maior) e a velocidade tangencial nessa órbita será de 7.888,829 m/s, contra 7.888,888 m/s da órbita do satélite.

3 – Com o que obtivemos acima, o astronauta se dirige radialmente sobre o satélite com a velocidade 10 m/s, e em 10s a diferença das velocidades acarretará um desvio em relação ao meio do satélite de apenas 0,6 m. Portanto o astronauta teria, sim, condições de tentar uma ancoragem.

Questão 2:

Ocultação Estelar é a observação da passagem de um objeto “em frente” a uma dada estrela para um dado observador. A medida da duração do evento de diferentes locais permite determinar o tamanho e forma do objeto. Abaixo podemos ver exemplos de curvas de luz que representam uma medida do perfil do corpo feitas de diferentes lugares (fig 1, à esquerda). Dessas medidas obtém-se as cordas de ocultação, cujos tamanhos são obtidos para cada observador, tendo em vista a duração do evento. Dessas cordas de ocultação calcula-se o raio e forma do objeto com boa precisão (fig. 2, à direita)

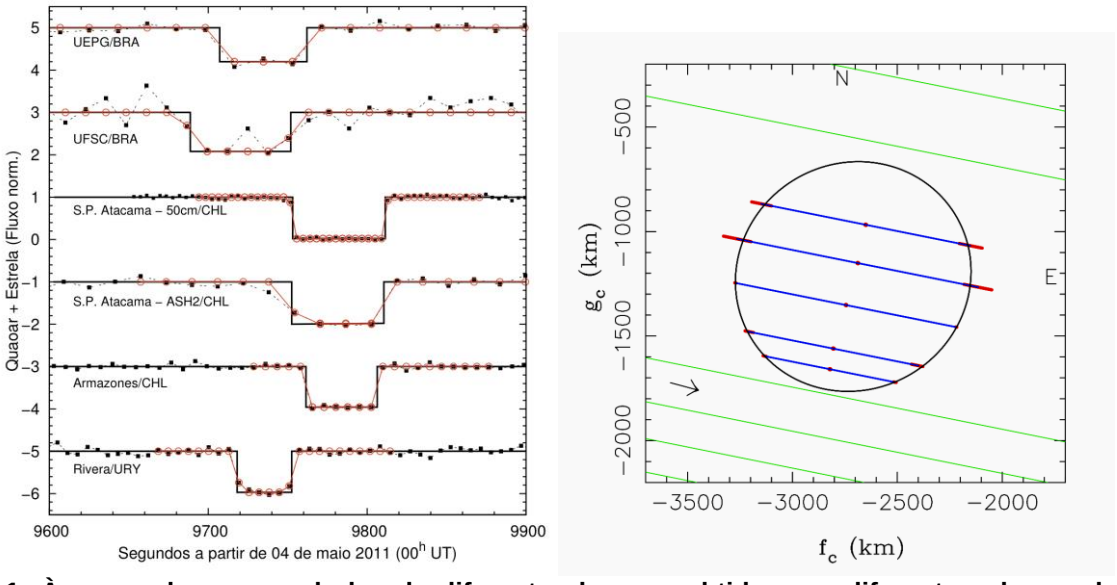


Figura 1: À esquerda, curvas de luz de diferentes lugares obtidas por diferentes observadores. À direita, a geometria (cordas de ocultação) das observações.

Dois observatórios, A e B, detectaram uma ocultação estelar e cada observatório mediu uma curva de luz, cujas ocultações duraram 50 e 30 segundos, respectivamente (fig 2).

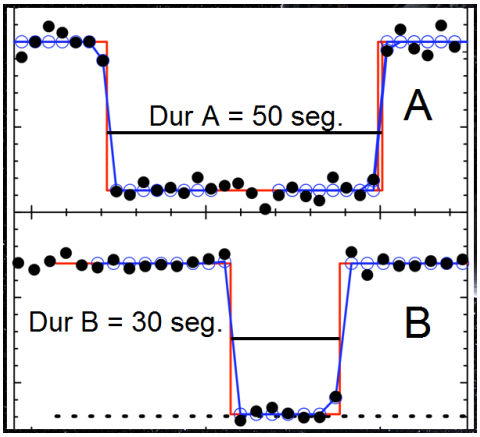


Figura 2: Curvas de luz dos observatórios A e B

Dados: Sabe-se que o objeto deslocava-se no céu a uma velocidade de 20 km/s.
Sabe-se também que a distância entre os observatórios é de 1360 km.

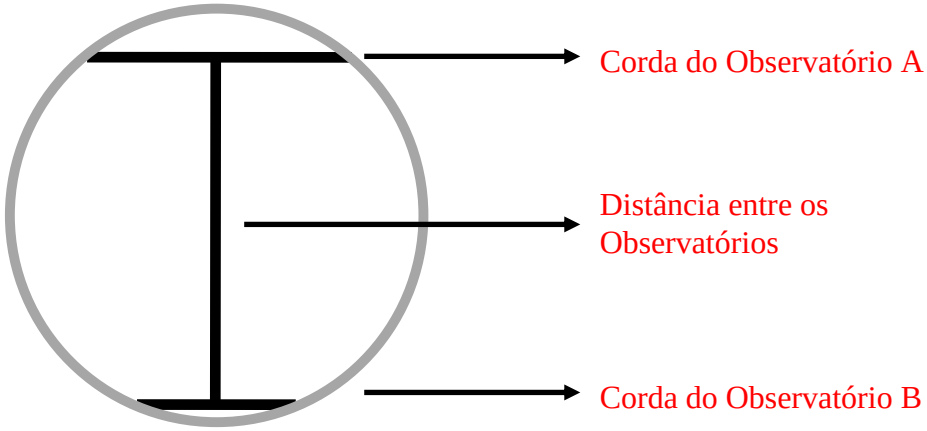
Com as informações acima, determine o raio do objeto, supondo que ele seja esférico.

Solução:

Como a velocidade do objeto e as durações do evento observadas, pode-se determinar o tamanho da corda medida por cada observatório.

Sabendo a distância entre os observatórios, reconstruímos a geometria da observação.

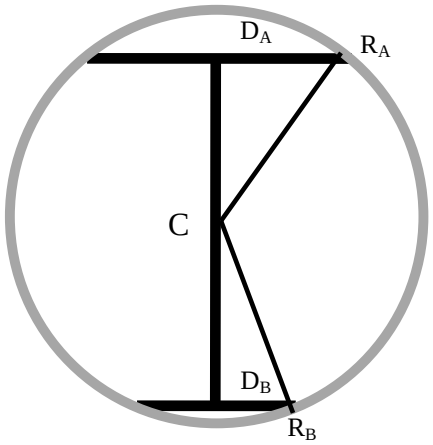
Supondo o objeto esférico:



Sabe-se que o objeto se deslocava-se no céu a uma velocidade de 20 km/s.

- Corda do observatório A: $C_A = 50 \times 20 = 1000$ km
- Corda do observatório B: $C_B = 30 \times 20 = 600$ km

Sabe-se também que a distância entre os observatórios: 1360 km



Nos triângulos temos os seguintes segmentos:

$D_AR_A = C_A/2 = S_A = 500$ km

$D_BR_B = C_B/2 = S_B = 300$ km

$CR_A = CR_B = R$ (o raio do corpo)

$D_AD_B = CD_A + CD_B = D_T = 1360$ km

CD_A e CD_B são desconhecidos.

Do teorema de Pitágoras temos:

$$R^2 = \left(\frac{C_A}{2}\right)^2 + CD_A^{\,2} = S_A^{\,2} + CD_A^{\,2}$$ e $$R^2 = \left(\frac{C_B}{2}\right)^2 + CD_B^{\,2} = S_B^{\,2} + CD_B^{\,2}$$

Portanto: $$S_A^{\,2} + CD_A^{\,2} = S_B^{\,2} + CD_B^{\,2}$$

Então: $$CD_A^{\,2} + CD_B^{\,2} = S_B^2 - S_A^2 = -160000$$

Ainda temos que: $D_T = CD_A + CD_B = 1360$

ou seja: $CD_A = 1360 - CD_B$

Relacionando as equações obtidas:

$$CD_A^{\,2} - CD_B^{\,2} = (1360 - CD_B)^2 - CD_B^{\,2}$$

$$1360^2 - 2 \cdot CD_B \cdot 1360 + CD_B^{\,2} - CD_B^{\,2} = -160000$$

Portanto: $CD_B = 739km$

Retornando ao teorema de Pitágoras, temos: $R^2 = \left(\frac{C_B}{2}\right)^2 + CD_B^{\,2} = 300^2 + 739^2$

Então o raio do corpo é R = 798 km.

Questão 3:

Antares é um estrela supergigante vermelha na constelação de escorpião com massa de $12{,}4M_\odot$ e raio de $883R_\odot$. Supondo que no final de sua vida ela se transforme em um pulsar com massa de $2M_\odot$ e 11 km de raio, calcule a frequência desse pulsar sabendo que a velocidade de rotação inicial de Antares é 20 km/s. Considere que a estrela é esférica nos dois estágios e que não houve perdas de momento angular.

Dados:

$M_\odot = 2{,}00 \times 10^{30}$ kg

$R_\odot = 6{,}958 \times 10^{5}$ km

RESPOSTA:

Primeiramente calcularemos a velocidade angular inicial de Antares a partir de sua velocidade de rotação e seu raio:

$$\omega = \frac{v_R}{R} \therefore \omega = \frac{20\,\frac{km}{s}}{883 \times 6{,}958 \times 10^5\ km} \therefore \omega = \frac{20}{6{,}144 \times 10^8} rad \therefore \omega = 3{,}025 \times \frac{10^{-8} rad}{s}$$

Como o momento angular da estrela se manteve constante, podemos igualar o momento angular inicial L_1 ao momento angular final L_2. Como $L = I \times \omega$ e, para uma esfera, $I = \frac{2}{5}MR^2$, temos:

$$L_1 = L_2 \therefore \frac{2}{5}M_1R_1^{\,2}\omega_1 = \frac{2}{5}M_2R_2^{\,2}\omega_2 \therefore \omega_2 = \frac{M_1R_1^{\,2}\omega_1}{M_2R_2^{\,2}}$$

$$\omega_2 = \frac{12{,}4M_\odot \times (883R_\odot)^2 \times 3{,}025 \times 10^{-8}\,\frac{rad}{s}}{2M_\odot \times (11\ km)^2}$$

$$\omega_2 = \frac{12{,}4 \times (883 \times 6{,}958 \times 10^5\ km)^2 \times 3{,}025 \times 10^{-8}\ \frac{rad}{s}}{2 \times 121\ km^2}$$

$$\omega_2 = \frac{1{,}416 \times 10^{11}\ \frac{rad}{s}}{242}$$

$$\omega_2 = 5{,}85 \times 10^8\ \frac{rad}{s}$$

A frequência angular desse pulsar pode ser expressa por:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \therefore f = \frac{5{,}85 \times 10^8\ \frac{rad}{s}}{2\pi} \therefore f = 9{,}31 \times 10^7\ Hz$$

Portanto, temos que a frequência do pulsar resultante será de $\boxed{9{,}31 \times 10^7 Hz}$.

Questão 4:

O Sol, por ser um corpo extenso, faz com que a sombra da Terra tenha o formato de um cone, que se estende por vários raios terrestres. A região desse cone por onde a Lua passa nos eclipses deve ser maior do que a própria Lua, caso contrário nunca teríamos um eclipse total.

Seja r o raio da Terra, R o raio do Sol, r_L o raio da Lua e L a distância entre os centros da Terra e do Sol.

Sabendo-se que:

R = 109 r

r_L= r/3,6

L = 23680 r

Calcule e determine:

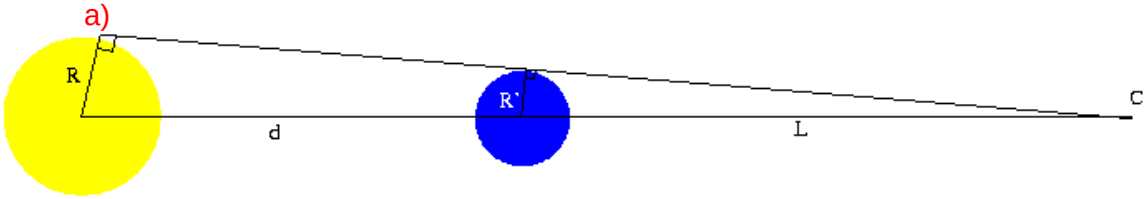
a) A altura do cone de sombra formado;

b) O raio desse cone à distância l = 60 r (onde passará a Lua);

c) Quantos diâmetros lunares cabem nessa região de sombra?

RESPOSTA:

a)

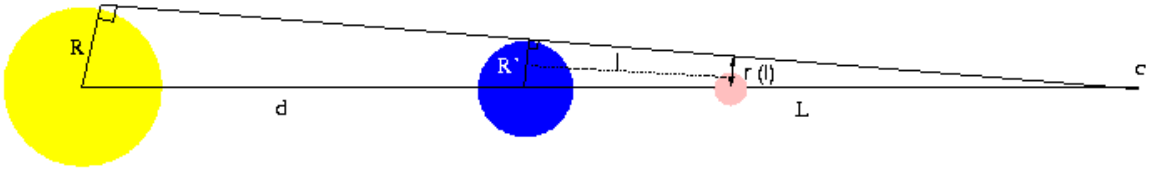


Por semelhança de triângulos, temos: $\frac{R'}{L} = \frac{R}{L+d}$

Portanto a altura do cone e sombra L é: $L = \frac{R'd}{R-R'}$

Substituindo: $L = \frac{r23680r}{109r-r} = \frac{23680r^2}{108r} \cong 219r$ ou 219 × 6,4×10^3 km = 1,4×10^6 km

b)



Por semelhança de triângulos, temos: $\frac{r(l)}{L-l} = \frac{R'}{L}$, onde r(l) é o raio da sombra à distância l

O raio da sombra à distância l é: $r(l) = R' \frac{L-l}{L}$

Substituindo: $r(l) = r\frac{219r-60r}{219} = \frac{159r}{219} \cong 726 \times 10^{-3} r$ ou $726\times10^{-3} \times 6{,}4\times10^{3}$ km = $4{,}6\times10^{3}$ km

c) $\frac{r(l)}{r_L} = \frac{726\times10^{-3}r}{r/3{,}6} \cong 2{,}6$

Questão 5:

Um astrofotógrafo no Rio de Janeiro quer obter imagens do Sol com o menor efeito de refração atmosférica. Nosso fotógrafo sabe que a distância do Sol ao zênite é função de sua declinação, e que essa varia a cada dia do ano. Por isso ele arrumou uma tabela com esses valores. Ele sabe também que, ao longo do ano, o Sol se adianta ou se atrasa em relação à hora civíl oficial. Por isso ele arrumou também um gráfico com a Equação do Tempo, que traz essa diferença.

a) Utilize a tabela com as declinações do Sol ao longo do ano para descobrir se haverá algum dia do ano em
que data o fotógrafo alcançará o seu objetivo. Responda se haverá ou não. Se sim, determine em que data ou em que datas isso acontecerá. Considere apenas o centro do disco solar.

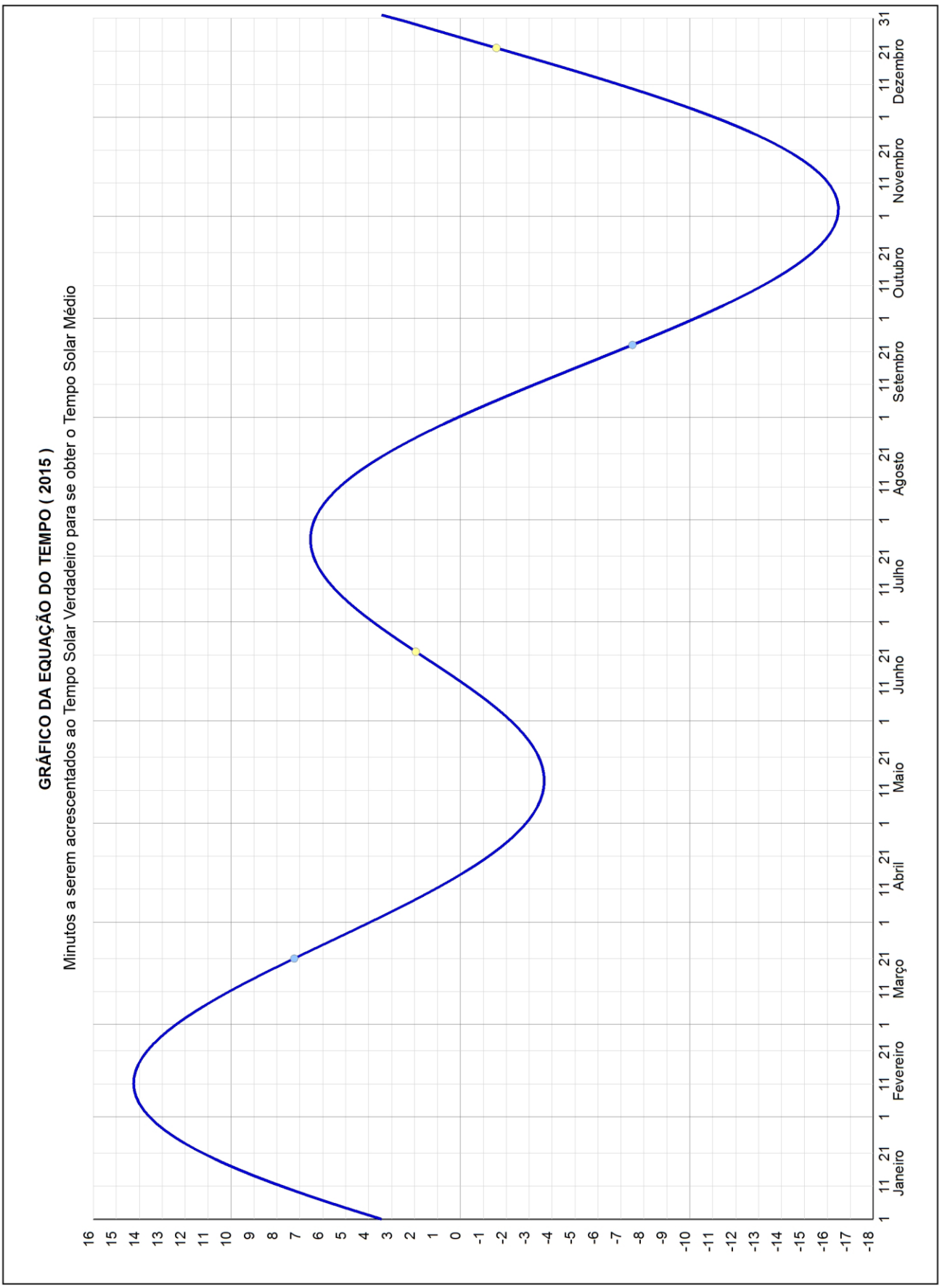
b) Utilize o gráfico da Equação do Tempo, para estimar a que horas (hora civil) o astrofotógrafo deverá fazer sua(s) foto(s) nesse(s) dia(s).

Considere os seguintes valores para as coordenadas geográficas do Rio de Janeiro:
λ = 43º 14' W ; φ = 23º 00´ S

Obs.: o gráfico da Equação do Tempo corresponde ao centro do Fuso Horário (45º00´ W)

Tabela de valores aproximados da Declinação Solar

	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez
1	-23.08°	-17.38°	-7.97°	4.15°	14.77°	21.91°	23.18°	18.28°	8.66°	-2.79°	-14.11°	-21.65°
2	-23.00°	-17.10°	-7.59°	4.53°	15.07°	22.05°	23.11°	18.03°	8.30°	-3.18°	-14.43°	-21.81°
3	-22.91°	-16.81°	-7.21°	4.92°	15.37°	22.18°	23.04°	17.78°	7.94°	-3.57°	-14.75°	-21.96°
4	-22.82°	-16.52°	-6.83°	5.30°	15.67°	22.31°	22.96°	17.52°	7.57°	-3.95°	-15.07°	-22.10°
5	-22.72°	-16.22°	-6.44°	5.69°	15.96°	22.43°	22.88°	17.26°	7.20°	-4.34°	-15.38°	-22.24°
6	-22.61°	-15.92°	-6.06°	6.07°	16.25°	22.54°	22.79°	16.99°	6.83°	-4.73°	-15.68°	-22.37°
7	-22.49°	-15.62°	-5.67°	6.45°	16.53°	22.65°	22.69°	16.72°	6.46°	-5.11°	-15.99°	-22.49°
8	-22.37°	-15.31°	-5.28°	6.82°	16.81°	22.75°	22.59°	16.44°	6.09°	-5.50°	-16.28°	-22.61°
9	-22.24°	-14.99°	-4.89°	7.20°	17.08°	22.84°	22.48°	16.16°	5.71°	-5.88°	-16.58°	-22.72°
10	-22.10°	-14.67°	-4.50°	7.57°	17.35°	22.93°	22.36°	15.87°	5.33°	-6.26°	-16.86°	-22.82°
11	-21.95°	-14.35°	-4.11°	7.94°	17.62°	23.01°	22.24°	15.58°	4.95°	-6.64°	-17.15°	-22.91°
12	-21.80°	-14.02°	-3.72°	8.31°	17.88°	23.08°	22.11°	15.29°	4.57°	-7.02°	-17.43°	-23.00°
13	-21.64°	-13.69°	-3.33°	8.68°	18.13°	23.15°	21.98°	14.99°	4.19°	-7.39°	-17.70°	-23.08°
14	-21.47°	-13.36°	-2.93°	9.04°	18.38°	23.21°	21.84°	14.69°	3.81°	-7.77°	-17.97°	-23.15°
15	-21.30°	-13.02°	-2.54°	9.40°	18.62°	23.26°	21.69°	14.38°	3.43°	-8.14°	-18.23°	-23.21°
16	-21.12°	-12.68°	-2.14°	9.76°	18.86°	23.31°	21.53°	14.07°	3.04°	-8.51°	-18.49°	-23.27°
17	-20.93°	-12.33°	-1.75°	10.12°	19.10°	23.35°	21.37°	13.76°	2.66°	-8.88°	-18.74°	-23.32°
18	-20.74°	-11.99°	-1.35°	10.47°	19.32°	23.38°	21.21°	13.44°	2.27°	-9.25°	-18.99°	-23.36°
19	-20.54°	-11.63°	-0.96°	10.82°	19.55°	23.40°	21.04°	13.12°	1.88°	-9.62°	-19.23°	-23.39°
20	-20.33°	-11.28°	-0.56°	11.17°	19.76°	23.42°	20.86°	12.79°	1.50°	-9.98°	-19.47°	-23.41°
21	-20.12°	-10.92°	-0.17°	11.51°	19.97°	23.43°	20.67°	12.47°	1.11°	-10.34°	-19.70°	-23.43°
22	-19.90°	-10.56°	0.23°	11.85°	20.18°	23.44°	20.48°	12.13°	0.72°	-10.70°	-19.92°	-23.44°
23	-19.67°	-10.20°	0.62°	12.19°	20.38°	23.44°	20.29°	11.80°	0.33°	-11.05°	-20.14°	-23.44°
24	-19.44°	-9.83°	1.02°	12.53°	20.57°	23.43°	20.09°	11.46°	-0.06°	-11.41°	-20.35°	-23.43°
25	-19.20°	-9.47°	1.41°	12.86°	20.76°	23.41°	19.88°	11.12°	-0.45°	-11.75°	-20.55°	-23.42°
26	-18.96°	-9.09°	1.80°	13.19°	20.95°	23.39°	19.67°	10.78°	-0.84°	-12.10°	-20.75°	-23.40°
27	-18.71°	-8.72°	2.20°	13.51°	21.12°	23.36°	19.45°	10.43°	-1.23°	-12.44°	-20.94°	-23.37°
28	-18.46°	-8.35°	2.59°	13.83°	21.29°	23.32°	19.23°	10.08°	-1.62°	-12.78°	-21.13°	-23.33°
29	-18.19°		2.98°	14.15°	21.46°	23.28°	19.00°	9.73°	-2.01°	-13.12°	-21.31°	-23.28°
30	-17.93°		3.37°	14.46°	21.61°	23.23°	18.76°	9.38°	-2.40°	-13.46°	-21.48°	-23.23°
31	-17.66°		3.76°		21.77°		18.53°	9.02°		-13.79°		-23.17°


GRÁFICO DA EQUAÇÃO DO TEMPO (2015)
Minutos a serem acrescentados ao Tempo Solar Verdadeiro para se obter o Tempo Solar Médio
16 15 14 13 12 11 10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 -1 -2 -3 -4 -5 -6 -7 -8 -9 -10 -11 -12 -13 -14 -15 -16 -17 -18
1 11 21 1 11 21 1 11 21 1 11 21 1 11 21 1 11 21 1 11 21 1 11 21 1 11 21 1 11 21 31
Janeiro Fevereiro Março Abril Maio Junho Julho Agosto Setembro Outubro Novembro Dezembro

RESPOSTAS

Pela tabela descobre-se que o valor da declinação do Sol será -23º nos dias **2 de janeiro** e **12 de dezembro**, ou seja, o centro do Sol passará a pino (no zênite) nesses dias, no Rio de Janeiro.

Através do gráfico estima-se que o Tempo Solar Verdadeiro está cerca de 4 mim adiantado em relação ao Tempo Solar Médio em 2 de janeiro e cerca de 7 min atrasado em relação ao Tempo Solar Médio em 12 de dezembro. Para obter a hora do meio-dia verdadeiro nessas datas no Rio de Janeiro, devemos ainda fazer uma correção do Tempo Solar Verdadeiro pelo fato de não estarmos no centro do fuso:

45º - 43º15' = 1º45' (a leste do centro do fuso)

Como 15º correspondem a 60 min, 1º45' corresponderá a 7 min (que devem ser subtraídos da Equação do Tempo)

Portanto: Em 2 de janeiro o meio-dia verdadeiro ocorrerá às 11h57min (12h+4min-7min)
Em 12 de dezembro o meio-dia verdadeiro ocorrerá às 11h46min (12h-7min-7min)