

Exercícios de Astronomia e Astrofísica para olimpíadas culturais

Thiago Paulin Caraviello

Introdução

Exercícios de Astronomia e Astrofísica para olimpíadas culturais é uma compilação de 52 questões, acompanhado das suas soluções, que tem por objetivo complementar os estudos dos alunos do ensino médio envolvidos em atividades olímpicas culturais de Astronomia. É uma ferramenta espetacular para aqueles que já tiveram contato com o assunto.

Os exercícios foram selecionados a partir dos temas mais frequentes presentes nas seletivas das equipes de estudantes que participaram da Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica (OLAA) e da *International Olympiad in Astronomy and Astrophysics* (IOAA), assim como exercícios destas competições.

Cada exercício vem acompanhada de uma letra que indica o nível de dificuldade segundo o autor. **[A]** indica menor dificuldade, **[B]** dificuldade moderada e **[C]** maior nível de dificuldade.

Autor

Professor de Física e Astronomia para alunos do ensino médio desde 2003, formado pela Universidade de São Paulo, possui grande experiência em competições olímpicas culturais de Astronomia.



Esteve presente em 4 edições da Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica: IV OLAA - Colômbia, V OLAA - Bolívia, VII OLAA - Brasil e VIII OLAA - Argentina; e em 3 edições da *International Olympiad in Astronomy and Astrophysics* : 7th IOAA - Grécia, 8th IOAA - Romênia e 10th IOAA - Índia. Atual membro da comissão organizadora da OBA.

Índice

Astronomia.....	3
Astrofísica.....	13
Soluções: Astronomia.....	32
Soluções: Astrofísica.....	58
Gabaritos: Astronomia e Astrofísica.....	89
Tabelas e Constantes.....	93

Astronomia

1) [A] (*seletiva*) Sabendo que o Sol nascerá, no dia 20/mar/2014, às 6 h 10 min 12 s na cidade de São Paulo ($23,5^\circ$ S ; $46,6^\circ$ W), neste mesmo dia, o Sol nascerá aproximadamente a que horas na cidade de Bertioga ($23,9^\circ$ S ; $46,1^\circ$ W)?

- a) 6 h 08 min b) 6 h 09 min c) 6 h 10 min d) 6 h 11 min
e) 6 h 12 min

2) [A] (*seletiva*) Em Sydney, Austrália ($33,5^\circ$ S ; $151,2^\circ$ E), a que horas, aproximadamente, o Sol nascerá no dia 20/mar/2014? Se necessário, adote valores do teste anterior.

- a) 5 h 57 min b) 5 h 59 min c) 6 h 01 min d) 6 h 03 min
e) 6 h 05min

3) [C] (*1st IOAA*) Para um observador numa latitude $42,5^\circ$ N e longitude 71° W, estime a hora do nascer do Sol no dia 21 de dezembro se o horário civil do observador é -5 GMT. Ignore a refração da atmosfera e o tamanho do disco solar.

4) [A] (*seletiva*) Um observador vê a estrela Sirius ($\delta_{\text{Sirius}} = -16^\circ 43' 24,6''$) passar pelo meridiano astronômico local a uma distância zenital $z = 39^\circ 05' 34,4''$ e azimute $A = 180^\circ$ contado a partir do ponto cardeal Norte para Leste. Determine a latitude na qual se encontra o observador.

5) [A] Em Tbilisi, capital de Geórgia, observa-se a culminação inferior da estrela β Ursa Majoris ($\delta = +74^\circ 31'$) a uma distância zenital de $63^\circ 46'$. Determine a latitude de Tbilisi.

6) [A] Em Kiev ($\varphi = +50^\circ 27'$) se observa a culminação superior de um cometa às 15 h 15 min 10 s de tempo sideral. Neste instante, o círculo vertical de um teodolito indica a distância zenital do cometa sendo $3^\circ 52'$ ao sul do zênite. Determine as coordenadas equatoriais, isto é, declinação e a ascensão reta, do cometa.

7) [A] Uma estrela descreve, acima do horizonte, um arco de 180° desde o instante do nascer até seu o ocaso. Durante a culminação superior, dista 55° ao norte do zênite.

a) Qual a declinação desta estrela?

b) Qual o ângulo que o plano do equador celeste está inclinado em relação ao horizonte?

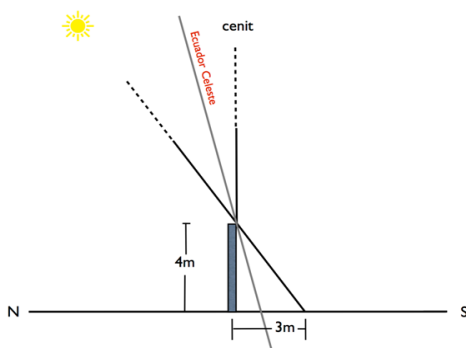
8) [A] Determine as coordenadas equatoriais de duas estrelas A e B que às 7 h 35 min de tempo sideral que culminam em Moscou ($\varphi = +55^\circ 45'$) a uma distância zenital $z = 40^\circ$, respectivamente, ao sul e ao norte do zênite.

9) [A] A altura do bordo inferior do Sol, no instante que este cruza o meridiano local, foi medido por meio de um sextante que estava em um bote em alto mar sendo $84^\circ 21'$ ao sul do zênite. Neste dia, a declinação do centro do Sol era $\delta = +18^\circ 39'$. Determine a latitude do local de observação tendo em conta que o diâmetro angular médio do Sol vale $32'$.

10) [B] Para uma estrela circumpolar obteve-se, na culminação superior, $10^\circ 20' 30''$ ao norte do zênite, e na culminação inferior, $30^\circ 20' 10''$ ao sul do zênite. Determine a latitude local e a declinação da estrela.

11) [A] (II OLAA) Um observador em Bogotá, cuja longitude é $\lambda = 74^{\circ} 05'$ oeste, mede o ângulo horário de uma estrela e obtém o valor $H = 45^{\circ} 30'$. Neste instante, o tempo sideral de Greenwich era TSG = 12 h 30 min. Qual é a ascensão reta desta estrela?

12) [A] (IV OLAA) Um observador no dia de solstício de junho conhece a altura de um poste e mede sua sombra durante a passagem do centro do disco solar pelo meridiano do lugar. Determine:



- O azimute (A) do Sol nesse instante. Considere como origem da coordenada esférica o ponto cardinal norte, e o sentido positivo na direção do leste.
- A declinação (δ) do Sol.
- O ângulo horário (H).
- A altura (h) do Sol.
- A ascensão reta (α).
- O tempo sideral local (TSL) para este instante.
- A latitude geográfica (ϕ) deste observador.

- 13)** [B] (VII OLAA) Entre as estrelas da tabela a seguir (equinócio 2000), escreva qual é, ou quais são:
- As que pertencem ao hemisfério sul celeste.
 - As que nunca podem ser vistas em Santiago ($\phi = 33^\circ \text{ S}$).
 - As que são circumpolares visíveis em Montevideo ($\phi = 35^\circ \text{ S}$);
 - A que faz sua passagem meridiana mais próxima do zênite na Cidade do México ($\phi = 19^\circ \text{ N}$);
 - A que faz sua passagem meridiana em 21 de março no horário mais próximo das 2 h 30 min (hora local) no Rio de Janeiro ($\phi = 23^\circ \text{ S}$; $\lambda = 43^\circ \text{ W}$).

Estrela	Ascensão Retã (AR)	Declinação(δ)
Peacock (α -Pav)	20h 25min 39s	- 56° 44' 07,4''
Alderamin(α -Cep)	21h 18min 34,9s	+ 62° 35' 06,4''
Algeiba (γ -Leo)	10h 19min 58,7s	+ 19° 50' 25,9''
Rigel (β -Ori)	5h 14min 32,3s	- 08° 12' 05,9''
Polaris (α -UMi)	2h 31min 50,2s	+ 89° 15' 51,3''
Regulus (α -Leo)	10h 08min 22s	+ 11° 58' 02,8''
Arcturus (α -Boo)	14h 15min 38,6s	+ 19° 10' 22,1''
Pollux (β -Gem)	7h 45min 18,2s	+ 28° 01' 31,7''
Achernar (α -Eri)	1h 37min 43s	- 57° 14' 13,3''

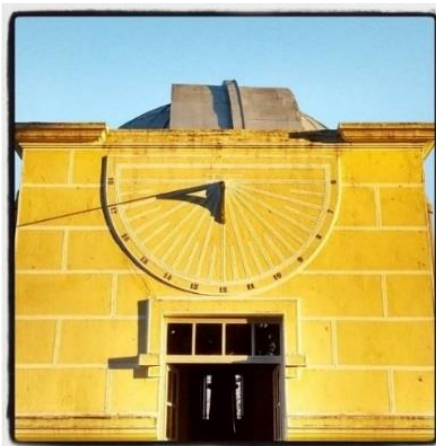
- 14)** [C] (3rd IOAA) Devido à precessão do eixo da Terra, a região do céu visível num local com coordenadas geográficas fixas muda com o tempo. Responda: É possível que, em alguma época, Sirius não nasça para um observador na Cracóvia ($\phi=50,1^\circ \text{ N}$), ao mesmo tempo em

que Canopus nasça e se ponha? Considere que o eixo da Terra percorre um cone de 47° de abertura. As coordenadas equatoriais atuais (ascensão reta e declinação) dessas estrelas são:

Sírius (α CMa) : 6h45min ; $-16^\circ 43'$

Canopus (α Car) : 6h24min ; $-52^\circ 42'$

15) [B] (6th IOAA) No Observatório Nacional do Brasil, localizado na cidade do Rio de Janeiro ($22^\circ 54' S$; $43^\circ 12' W$), existe um relógio de Sol preso a porta da cúpula que leva ao telescópio. Este relógio é constituído por uma única haste de 32 cm, inclinada para o norte e



paralelo ao eixo de rotação da Terra. Considerando que a porta está contida no plano leste - zênite - oeste, determine:

- Para quais declinações do Sol o relógio não irá funcionar, no mínimo, uma fração do dia?
- Para quais declinações do Sol o relógio não irá funcionar em nenhum momento do dia?

16) [A] (seletiva) Em relação à Terra e ao Sol, o período sinódico de Vênus é de aproximadamente 584 dias e o de Júpiter 399 dias. De quanto em quanto tempo Júpiter é visto em oposição ao Sol a partir de Vênus? Ou seja, qual

o período sinódico, aproximadamente, de Júpiter tendo Vênus e o Sol como referências?

- a) 224 dias b) 237 dias c) 365 dias d) 1260 dias
e) 4037 dias

17) [A] (3rd IOAA) Suponha que você viva na época de Copérnico não conhecendo as Leis de Kepler. Após aceitar a ideia revolucionária de que todos os planetas orbitam o Sol, você mede o período orbital de Marte como 687 dias. A seguir, você observa que, 106 dias após a oposição de Marte, o planeta aparece em quadratura. Calcule a distância Marte-Sol, em unidades astronômicas.

18) [A] Um satélite gira em torno da Terra em órbita circular ao longo do equador celeste posicionado na mesma longitude de Porto Alegre ($\phi = 30^\circ$ S). Um observador em Porto Alegre mede a altura do satélite sendo $h = 45^\circ$ quando este cruza o meridiano local. Determine, neste instante, a distância entre o satélite e o observador.

19) [B] (5th IOAA) Assumindo que Phobos move-se em torno de Marte em uma órbita perfeitamente circular e sobre o plano equatorial deste planeta, determine o tempo que Phobos ficará acima do horizonte para um observador (marciano) situado sobre a linha do equador. Adote: Período orbital de Marte = 24,63 h; raio de Marte = 3393 km; altitude de Phobos = 5987 km; massa de Marte = $6,39 \cdot 10^{23}$ kg.

20) [B] (3rd IOAA) Um estudante tenta medir o campo de visão da ocular de seu telescópio usando a rotação da Terra. Para tal, o observador aponta o telescópio para Vega (α -Lyr: AR = 18,5 h ; $\delta = +39^\circ$), desliga o motor de acompanhamento e mede o tempo que Vega leva para cruzar o diâmetro do campo de visão obtendo o valor $t = 5,3$ min. Qual o campo de visão deste telescópio em minutos de arco?

21) [C] (3rd IOAA) A Montanha Damavand está localizada na região norte do Irã, costa sul do Mar Cáspio. Considere um observador sentado no topo desta montanha (latitude = $35^\circ 57'$ N; longitude = $52^\circ 6'$ E; altitude = $5,6 \cdot 10^3$ m a partir do nível do mar) e contemplando o céu por acima do Mar Cáspio. Qual é a declinação mínima de uma estrela para ser vista marginalmente circumpolar para esse observador? O raio geodésico da Terra, nesta latitude, é de 6370,8 km. O nível da superfície do Mar Cáspio é aproximadamente igual ao nível médio do mar

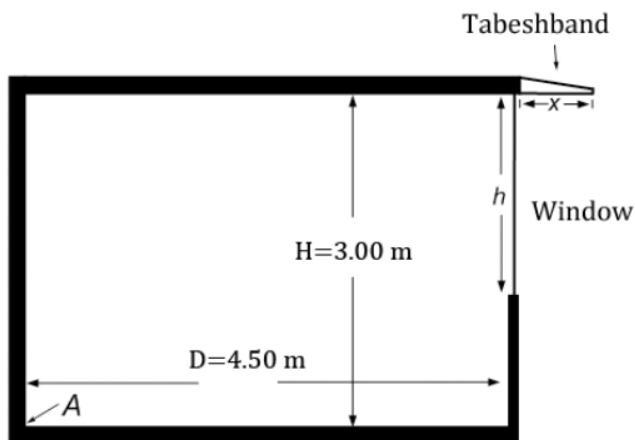
22) [B] (V OLAA) A Lua é vista no horizonte como mostra a figura a seguir. Analisando a imagem, Identifique e justifique astronomicamente em que fase a Lua está. Estime a hora neste instante e também se o horizonte mostrado é o ocidental ou oriental.



Figura da questão 22

23) [C] (2nd IOAA) Uma Lua Cheia aconteceu em 19 de Junho de 2008 às 00 h 30 min Tempo Oeste Indonésio (hora local civil para a parte oeste da Indonésia, com meridiano de 105° E). Calcule os valores máximos e mínimos possíveis da duração da Lua acima do horizonte dos observadores no observatório em Bosscha (longitude: $107^\circ 35' 00''$ E, latitude: $6^\circ 49' 00''$ S, elevação: 1300 m). Zona de tempo = UT +7h 30 min. Inclinação da órbita lunar em relação ao plano da eclíptica = $5,14^\circ$.

24) [C] (3rd IOAA) Na arquitetura Persa típica, existe uma estrutura chamada "Tabeshband" (marquise), no topo das janelas voltadas para o Sul, que controla a incidência de luz solar no verão e no inverno. No verão, quando o Sol está alto, a Tabeshband impede a luz do Sol de entrar nos aposentos, mantendo o interior mais frio. Na arquitetura moderna, é sabido que a Tabeshband economiza cerca de 20% do custo de energia. A Figura 1 mostra uma seção vertical de uma casa, à latitude de 36° N, com a janela e o Tabeshband.



Usando os parâmetros desenhados na figura, calcule a largura máxima da Tabeshband, x , e a altura máxima da janela, h , de forma que:

- Nenhuma luz solar direta atinja o quarto ao meio-dia do solstício de verão.
- A luz do Sol atinja o fim do quarto (indicado pelo ponto A na figura) ao meio-dia do solstício de inverno.

25) [B] (10th IOAA) Um observador no hemisfério norte reparou que o comprimento da menor sombra de uma vareta vertical de 1,000 m em determinado dia foi de 1,732 m. No mesmo dia, o comprimento da maior sombra foi de 5,671 m. Encontre a latitude φ do observador e a declinação do Sol δ nesse dia. Considere o Sol como uma fonte puntiforme e ignore a refração atmosférica.

26) [C] (6th IOAA) Um observador em Salonika ($\varphi = 40,65^\circ$ N), Grécia, contempla o céu estrelado. De repente, ele percebe que uma estrela ($\alpha = 5\text{h } 55\text{ min}$; $\delta = 7,41^\circ$ e $m = 0,45$), durante sua passagem pelo meridiano local, misteriosamente se desprende da esfera celeste e continua o seu movimento com velocidade tangencial constante por toda eternidade! Considere a Terra em repouso e a esfera celeste em rotação.

- a) Determine as coordenadas alto-azimutais finais desta estrela.
- b) Determine quanto tempo levará para a estrela atingir magnitude aparente 6.

Astrofísica

1) [A] (VOLAA) Um satélite de 300 kg de massa se encontra em uma órbita circular ao redor da Terra a uma altura de 500 km da superfície. Ele realiza uma manobra de tal maneira que passa para uma nova órbita circular cujo raio é o triplo da anterior. Neste contexto, responda:

- Qual é a variação de energia mecânica do satélite?
- Qual é a relação entre os períodos das órbitas?
- Deduza a expressão geral para a velocidade de escape do satélite a uma distância r , medida desde o centro da Terra para este problema em particular. Qual a razão entre as velocidades de escape de ambas as órbitas?

2) [A] (seletiva) No dia 18 de fevereiro de 2014 um asteroide com 270 m de largura passou próximo da Terra. Mesmo sendo considerada potencialmente perigosa, a rocha espacial, conhecida como 2000 EM26, não representou ameaça. A distância mais próxima da Terra a que ela chegou foi de 3,4 milhões de km, o equivalente a 8,8 vezes a distância entre nosso planeta e a Lua. Sua velocidade foi estimada em 47 mil km/h. Sabendo destas informações, determine:

- o tipo de órbita do asteroide (elíptica, parabólica ou hiperbólica), supondo a interação apenas com o Sol, e considerando que no momento de maior aproximação à Terra, ocorreu um alinhamento Sol-Asteroide-Terra.

b) o tipo de órbita do asteroide (elíptica, parabólica ou hiperbólica), supondo a interação apenas com a Terra.

3) [B] (2nd IOAA) Encontre a relação para a velocidade de escape de um objeto lançado a partir do centro de uma nuvem proto-estelar. Esta nuvem de gás de massa M e raio R possui densidade uniforme. Ignore as colisões entre as partículas da nuvem e o objeto. Considere o fato de que se o objeto fosse abandonado da extremidade limite da nuvem, chegaria ao seu centro com velocidade igual a

$$v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

4) [A] Prove que, em uma órbita elíptica kepleriana, o semi-eixo maior a é dado por:

$$a = P \cdot \frac{\sqrt{v_M \cdot v_m}}{2\pi}$$

Onde: P é o período orbital, v_M e v_m são, respectivamente, a velocidade máxima e mínima nesta órbita.

5) [B] (seletiva) Uma situação inesperada ocorre quando um astronauta se desgarra de um satélite artificial da Terra pelo rompimento do “cordão umbilical” que o liga ao satélite durante sua missão externa. Uma pane momentânea nos sistemas eletrônicos do satélite complica a situação e impede qualquer ação imediata da tripulação para salvamento do astronauta. Nesse instante o astronauta aciona seu equipamento de propulsão, que ainda tem combustível para impulsioná-lo rapidamente a uma velocidade de 10 m/s, em direção radial ao satélite.

Queremos saber se o astronauta conseguirá alcançar o satélite para tentar fazer uma ancoragem provisória nessas condições.

Seguem alguns dados relativos ao problema:

- Raio da Terra: 6.380 km;
- Altura do satélite em relação à Terra: 400 km;
- Período da órbita do satélite: 92 min 24 s;
- A altura do astronauta em relação à Terra (sua órbita) no momento da ruptura do cabo corresponde a um aumento em seu período orbital de 0,12 s em relação ao período anterior, o do satélite em que estava.

Obs: O satélite é um cilindro de 12 m de comprimento e 2,5 m de diâmetro e tem seu eixo contido na trajetória. No momento proposto no problema o astronauta se encontra na vertical que passa pelo ponto médio do corpo do satélite, portanto, você deverá levar em conta a composição diferencial de sua velocidade orbital em relação à do satélite para verificar um possível encontro.

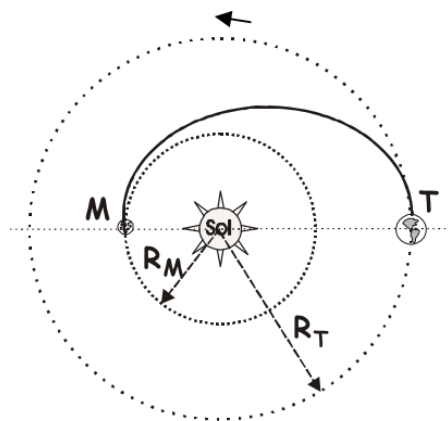
Desenvolva o que se pede:

a) Use a 3ª Lei de Kepler para encontrar a relação entre a mudança de período (ΔP) causada por uma mudança radial de distância (Δa) de um corpo (satélite artificial) que orbita outro (Terra), considerando ΔP e Δa numericamente muito pequenos comparados com P e a . Use isso para encontrar o afastamento do astronauta em relação ao satélite, depois do rompimento do cabo.

b) Calcule as velocidades tangenciais do satélite e do astronauta (utilize três casas decimais).

c) Verifique de quanto será o desvio, em relação ao meio do satélite, quando o astronauta conseguir alcançar a órbita do satélite, e se, nesse caso, ele poderia se ancorar nele.

6) [A] (II OLAA) Considere que os planetas Mercúrio e Terra orbitam no sentido anti-horário e em um mesmo plano ao redor do Sol com raios orbitais R_M e R_T , respectivamente. Da Terra, deseja-se lançar uma nave de tal forma que, movendo-se através de uma órbita elíptica, apenas por atração gravitacional, a nave atinja o planeta Mercúrio. Em função dos raios orbitais, da massa solar e da constante gravitacional, determine:



a) A velocidade de lançamento da Terra que se deve impulsionar a nave.

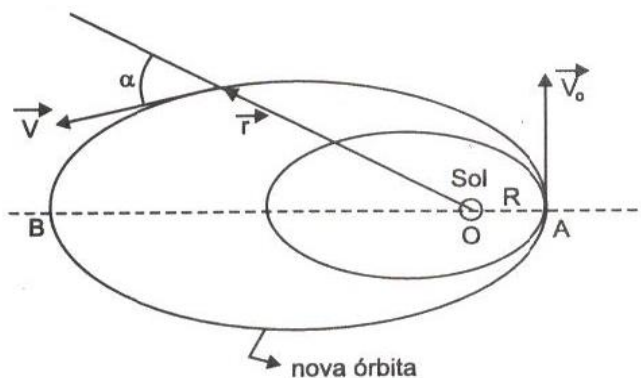
b) O tempo, em dias terrestres, que a nave leva para ir da Terra a Mercúrio seguindo esta órbita. Adote: $R_M = 0,4$ UA e $R_T = 1$ UA.

7) [B] (seletiva) Uma sonda lançada para Marte tem periélio e afélio sobre as órbitas da Terra e Marte respectivamente. Esse tipo de órbita é denominada ÓRBITA DE MÍNIMA ENERGIA, ou ÓRBITA DE TRANSFERÊNCIA DE HOHMANN, nome dado em homenagem ao engenheiro alemão Walter Hohmann (1880-1945), que propôs a manobra em 1925. A sonda parte da órbita terrestre e alcança Marte quando chega a seu afélio. Durante o percurso é afetada apenas pela força gravitacional do Sol. As órbitas da Terra e Marte são consideradas coplanares. Considere que a equação da velocidade orbital para uma órbita elíptica é dada por :

$$v_s^2 = \mu \cdot \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad \text{Onde } \mu = G.M$$

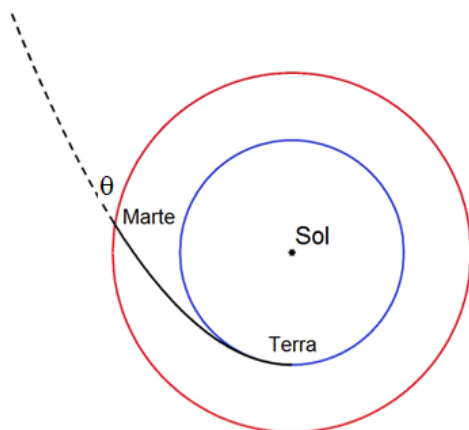
- Determine o semieixo maior e a excentricidade da órbita de transferência, sabendo que os raios das órbitas da Terra e de Marte, supostas circulares, são, respectivamente, $R_T = 1 \text{ UA}$ e $R_M = 1,5 \text{ UA}$.
- Calcule a diferença de velocidade necessária para que a sonda percorra a trajetória desejada a partir de uma órbita circular de raio igual ao raio da órbita da Terra.
- Calcule o tempo de viagem entre a Terra e Marte.
- Calcule a diferença entre as longitudes eclípticas de Marte e Terra no instante do disparo dos foguetes para a injeção da sonda na órbita de transferência.

8) [B] Suponha um cenário de ficção científica em que a Terra é atingida por um imenso meteoro. Em consequência do impacto, somente o módulo da velocidade da Terra é alterado, sendo v_0 seu valor imediatamente após o impacto, como mostra a figura abaixo.



O meteoro colide com a Terra exatamente na posição onde a distância entre a Terra e o Sol é mínima. Considere a atração gravitacional exercida pelo Sol, tido como referencial inercial, como única força de interação que atua sobre a Terra após a colisão, M a massa do Sol e G a constante da gravitação universal. Considere que o momento angular da Terra, de massa m , é conservado. Determine a distância (OB) , do apogeu ao centro do Sol, da trajetória que a Terra passa a percorrer após o choque com o meteoro.

9) [C] (4th IOAA) Uma nave espacial é lançada da Terra e rapidamente é acelerada para sua máxima velocidade, de tal forma que sua órbita é uma parábola com o Sol no foco e tangenciando a órbita terrestre. Considere que as órbitas da Terra e de Marte são círculos no mesmo plano, com raios iguais a $R_T = 1,0$ UA e $R_M = 1,5$ UA, respectivamente. Durante a viagem somente a gravidade do Sol deve ser considerada. A figura abaixo mostra a trajetória da nave espacial, fora de escala, vista do polo norte eclíptico. O círculo interno é a órbita da Terra e o círculo externo é a órbita de Marte.



Determine o ângulo θ entre a órbita da nave espacial e da órbita de Marte, como visto na figura, quando a nave cruza a órbita de Marte. Não considere o efeito gravitacional de Marte.

10) [C] (2nd IOAA) Considere um objeto orbitando a Terra apenas sob influência da sua força gravitacional. Sendo u o inverso da distância entre o objeto e o centro da Terra e p a intensidade do seu momento linear, quando o objeto viaja entre os pontos A e B, cujos valores u e p são mostrados na tabela abaixo:

	$p(10^9 \text{ kg.m.s}^{-1})$	$u(10^{-8} \text{ m}^{-1})$
A	0,052	5,15
B	1,94	194,17

Nestas condições, determine:

- a) a massa do objeto.
- b) a sua energia total.
- c) esboce a curva u em função de p no trecho de A até B.

11) [C] (4th IOAA) O planeta Taris hospeda a civilização Korribiana. A espécie Korribiana é uma forma de vida alienígena inteligente. Eles falam Korribianês. O dicionário Korribianês-Português segue abaixo. Dê uma lida. Os astrônomos Korribianeses têm estudado o céu por milhares de anos. Seu conhecimento pode ser resumido como segue:

- Taris orbita sua estrela Sola em uma órbita circular, a uma distância de 1 Taris-comprimento.

- Taris orbita Sola em 1 Taris-ano.
- A inclinação do equador de Taris em relação ao seu plano orbital é de 3° .
- Há exatamente 10 Taris-dias em 1 Taris-ano.
- Taris tem duas luas, chamadas Endor e Extor. Ambas têm órbitas circulares.
- O período sideral orbital de Endor, ao redor de Taris, é exatamente 0,2 Taris-dias.
- O período sideral orbital de Extor, ao redor de Taris, é exatamente 1,6 Taris-dias.
- A distância entre Taris e Endor é 1 Endor-comprimento.
- Corulus, outro planeta, também orbita Sola em uma órbita circular. Corulus tem uma lua.
- A distância entre Sola e Corulus é de 9 Taris-comprimento.
- O ano Tarisiano começa quando a longitude Soláptica de Sola é zero.

Korribianês	Tradução
Corulus	Um planeta orbitando Sola
Endor	(i) Deusa da noite (ii) uma lua de Taris.
Endor-comprimento	Distância entre Taris e Endor.
Extor	(i) Deus da paz; (ii) uma lua de Taris.
Sola	(i) Deus da vida; (ii) A estrela que Taris e Corulus orbitam.

Soláptica	Caminho aparente de Sola e Corulus como vistos por Taris.
Taris	Um planeta orbitando a estrela Sola, berço da civilização Taris Korribiana.
Taris-dia	O tempo entre duas meias-noites sucessivas no planeta Taris.
Taris-comprimento	A distância entre Sola e Taris.
Taris-ano	Tempo que Taris leva para dar uma volta ao redor de Sola.

- a) Quantas vezes Taris gira ao redor de seu eixo durante um Taris-ano?
- b) Qual a distância entre Taris e Extor, em Endor-comprimentos?
- c) Qual o período orbital de Corulus, em Taris-anos?
- d) Qual a distância entre Taris e Corulus, quando Corulus está em oposição?
- e) Se, no começo de um Taris-ano particular, Corulus e Taris estavam em oposição, qual seria a longitude Soláptica (observada de Taris) de Corulus 'n' Taris-dias após o início do Taris-ano?
- f) Qual é a área do triângulo formado por Sola, Taris e Corulus exatamente um Taris-dia após a oposição?

12) [B] Uma estrela supergigante vermelha na constelação de escorpião possui massa de $15,5 M_{\text{Sol}}$ e raio de $700 R_{\text{Sol}}$. Supondo que no final de sua vida ela se transforme em uma estrela com massa de $4 M_{\text{Sol}}$ e $4 \cdot 10^5$ km de raio, calcule sua nova frequência de rotação sabendo que a velocidade de rotação inicial é $3,4$ km/s. Considere que a estrela é esférica nos dois estágios e que não houve perdas de momento angular.

13) [A] (VI OLAA) A estrela Sirius tem um magnitude aparente $-1,5$ e se encontra a uma distância de $2,6$ pc. Sabe-se ainda, que se trata de uma estrela de tipo espectral A1 com uma temperatura superficial de $10\,000$ K.

- Calcule a magnitude absoluta de Sirius.
- Calcule a luminosidade de Sirius em relação ao Sol, sabendo que a magnitude absoluta do Sol é $4,82$.
- Calcule o raio de Sirius em relação ao raio do Sol sabendo que a temperatura superficial do Sol é 5800 K.

14) [A] (*seletiva*) Uma estrela da sequência principal que se encontra a 30 pc de distância da Terra possui magnitude bolométrica aparente de $4,0$. Quando essa estrela sair da sequência principal, irá mudar sua posição no diagrama HR para o ramo das gigantes, o que acarretará numa diminuição de 4 vezes de sua temperatura. Ao mesmo tempo, seu raio irá aumentar 150 vezes. Em função dessas informações, responda:

a) Qual deveria ser uma nova distância para esta estrela, de maneira a fazer com que ela mantenha sua magnitude bolométrica aparente inalterada?

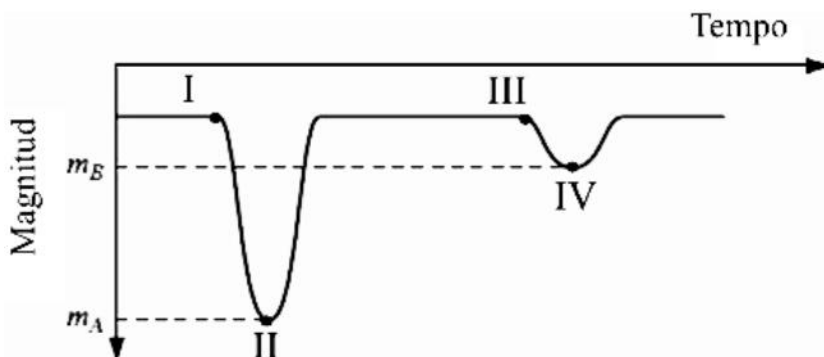
b) Suponha que a estrela do item anterior possua massa de $8,0 \cdot 10^{30}$ kg e luminosidade de $6,0 \cdot 10^{28}$ W. Suponha ainda que 0,9% da massa total inicial da estrela pudesse ser transformada em energia, durante a vida inteira da estrela. Estime então o tempo máximo de vida dessa estrela, assumindo que sua luminosidade permaneça sempre constante.

15) [A] (seletiva) Em um sistema binário, a magnitude aparente da estrela principal vale 2,0 e da estrela secundária vale 3,0. Calcule a magnitude combinada máxima para o sistema.

16) [A] (3rd IOAA) Estime o número de fótons por segundo que chega ao olho de um observador com pupila de diâmetro $d = 6$ mm vindo de uma estrela tipo G2V com magnitude aparente 6 (limite da visão humana). Assuma que toda a radiação desta estrela está em $\lambda = 550 \text{ nm}$ (visível). Adote: $M_{\text{sol}} = -26,8$; $F_{\text{sol}} = 1,37 \cdot 10^3 \text{ W/m}^2$; $h = 6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

17) [B] (VI OLAA) A figura mostra a curva de luz de uma binária eclipsante tipo Algol, cujo plano orbital está na direção da linha de visada. Indicam-se as magnitudes aparentes, m_A e m_B , correspondentes aos mínimos primário e secundário da curva de luz, respectivamente. A profundidade de cada mínimo Δmag é definido como a

diferença entre a magnitude aparente m_A ou m_B e a magnitude aparente total da binária m_{tot} (quando não há eclipse). Sejam T_B e T_A as temperaturas efetivas da componente mais brilhante e da componente mais débil, respectivamente. As duas componentes têm o mesmo raio R .



a) Faça um esquema das posições relativas entre as duas componentes do sistema, com respeito ao observador, correspondentes aos seguintes pontos da curva de luz: I - imediatamente antes que se comece a produzir o mínimo primário, II - quando se alcança o mínimo primário, III - imediatamente antes que se comece o mínimo secundário e IV - quando se alcança o mínimo secundário. Indique claramente qual é a estrela A e qual é a B.

b) Encontre uma expressão que relacione a profundidade de cada mínimo da curva de luz com a luminosidade total da binária (L_{tot}) e a luminosidade individual de cada componente (L_A , L_B).

c) Sabendo que as temperaturas efetivas das componentes são $T_B = 12\,000\text{ K}$ e $T_A = 5\,000\text{ K}$, calcule a profundidade Δmag de cada mínimo.

18) [A] No espectro de Aldebaran (α -Tauris) se observa para a linha de Na I (átomo de sódio ionizado) com $\lambda_0 = 5890.10^{-10}\text{ m}$ um deslocamento de $\Delta\lambda = 1,062.10^{-10}\text{ m}$. Se suas magnitudes visuais aparentes e absolutas são $m_{v\alpha} = +0,85$ e $M_{v\alpha} = -0,63$ e a magnitude limite do olho humano é $m_H = +6$, calcule o tempo que levará Aldebaran para deixar de ser visível da Terra sem a ajuda de um telescópio. Dados: $1\text{ pc} = 3,086.10^{13}\text{ km}$; $1\text{ ano} = 3,154.10^7\text{ s}$.

19) [A] A super gigante azul Naos (ζ -Puppis) é a estrela mais brilhante da constelação da Popa e possui temperatura efetiva igual a $T_{ef} = 42\,000\text{ K}$.

Dados: Magnitude visual absoluta de Naos: $M_v = -5,96$; Correção bolométrica de Naos: C.B. = 4,04.

a) Determine o comprimento de onda máximo, $\lambda_{m\acute{a}x}$, de emissão de Naos considerando que se comporta como um corpo negro.

b) Determine a fração de energia irradiada por esta estrela na região visível.

Comentário: A correção bolométrica (C.B.) é definida como a diferença entre as magnitudes visual e bolométrica de um astro, ou seja, $C.B. = M_v - M_B$. Enquanto a magnitude visual considera apenas a região visível do espectro, a magnitude bolométrica considera todo o espectro.

20) [B] A estrela Minelava (δ -Virginis) é uma gigante vermelha da constelação de Virgem com massa igual a 2 massas solares. Possui magnitude visual absoluta $M_V = -0,58$ e C.B. = 1,68. Determine a densidade de Minelava, em densidades solares, sabendo que sua temperatura efetiva é $T_{\text{ef}} = 3\,720\text{ K}$.

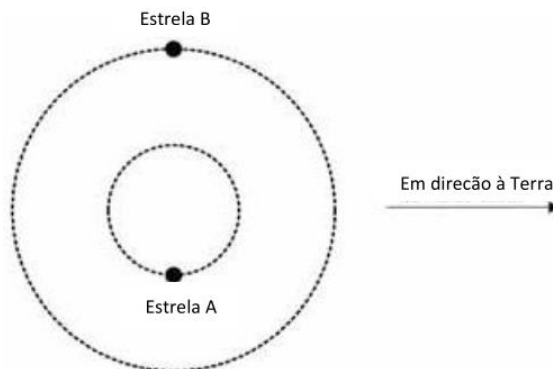
Dados: Magnitude absoluta bolométrica do Sol = + 4,74; luminosidade bolométrica do Sol = $3,486 \cdot 10^{26}\text{ W}$.

21) [A] (V OLAA) Em um sistema binário, as estrelas orbitam ao redor de um ponto comum. A luz de ambas é observada na Terra. Assuma que ambas emitem uma luz com comprimento de onda de $6,58 \cdot 10^{-7}\text{ m}$.

a) Quando as estrelas estão na configuração mostrada na figura abaixo, o observador na Terra mede um comprimento de $6,58 \cdot 10^{-7}\text{ m}$ onda para ambas. Explique porque não existe efeito Doppler neste caso.



b) Quando as estrelas estão nas posições mostradas na figura a seguir, o observador na Terra mede dois comprimentos de onda: $6,50 \cdot 10^{-7}$ m para a estrela A e $6,76 \cdot 10^{-7}$ m para a estrela B. Determine a velocidade das estrelas e indique qual está se distanciando e qual está se aproximando.



22) [B] (VII OLAA) O desvio para o vermelho (*redshift*) observado do Objeto Quasi-Estelar (QSO) LBQS 0042-2550 é $z = 0,13$. Estime sua distância e quanto tempo sua luz demorou a chegar até nós. Dado: $H_0 = 67,80 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$.

23) [B] (V OLAA) Estudantes olímpicos observaram uma galáxia espiral NGC OLAA, cujos parâmetros são mostrados no quadro abaixo. Foi medido o comprimento de onda do centro do disco da galáxia, centrado na linha de emissão $H\alpha$ ($6562,80 \text{ \AA}$):



Galáxia	Tamanho angular	Distância (10^6 al)	$\lambda_{\text{observado}}$ (Å)
NGC OLAA	$3,20^\circ \times 1,0^\circ$	2,5	6556,22

- Determine o diâmetro da galáxia em anos-luz assumindo que seu disco é completamente circular e que os valores observados são os dados na tabela.
- Determine a inclinação (i) normal ao disco com respeito a linha de visada.
- Determine a velocidade de recessão desta galáxia e o módulo do parâmetro z .
- Determine a magnitude absoluta da galáxia assumindo que sua magnitude aparente é 4,36.
- Será possível observar esta Galáxia com um telescópio LX200 de 8" (8 polegadas) Schmidt-Cassegrain? Justifique sua resposta, mediante ao cálculo da magnitude limite deste telescópio.

Comentário: A magnitude limite de um telescópio é dada por: $m_{\text{lim}} = 7,1 + 5 \log d$; onde d é o diâmetro da objetiva em cm. Adote: $1'' = 2,54$ cm.

24) [A] (4th IOAA) Uma cratera na superfície da Lua possui diâmetro igual a 80 km. Justifique, através de argumentos físicos e matemáticos, se é possível observar esta cratera a olho nu.

Adote: Diâmetro da pupila humana = 5 mm; distância Terra-Lua 384 400 km; comprimento de onda médio da radiação visível = 500 nm.

25) [A] (4th IOAA) Acredita-se que o centro galáctico possui um buraco negro supermassivo, de massa $M = 4 \cdot 10^6 M_{\text{Sol}}$. A comunidade astronômica está tentando distinguir seu horizonte de eventos. Para um buraco negro sem rotação, o horizonte de eventos tem o mesmo valor do raio de Schwarzschild, ou seja, $R_{\text{Sch}} = 3 \cdot (M/M_{\text{Sol}})$, com R_{Sch} em km. Assumindo que temos um telescópio do tamanho da Terra, quais os comprimentos de onda deveríamos usar para distinguir o horizonte de eventos deste buraco negro? Considere que o Sol está a 8,5 kpc do centro da Galáxia.

26) [A] (VI OLAA) Há muito se tem observado que certas estrelas apresentam um excesso de emissão de radiação no infravermelho e que isso pode indicar a presença de um disco, anéis de poeira, ou asteroides ao redor das mesmas. Com telescópios convencionais, não é possível observar diretamente esses discos devido a atmosfera que reduz o poder de resolução desses telescópios. Contudo, novas tecnologias, como a óptica adaptativa extrema, permitem, agora, observar diretamente tais discos e até obter imagens de planetas em torno de outras estrelas. A

óptica adaptativa extrema permite que os grandes telescópios cheguem ao limite teórico de seu poder de resolução.

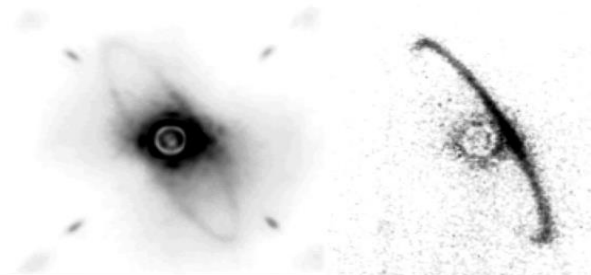


Imagem do anel no sistema HR4796 com óptica adaptativa extrema em $\lambda = 1,6 \times 10^{-6}$ m. A luz da estrela foi removida da imagem.

Imagine que há um anel de raio 10 UA ao redor de uma estrela a 25 pc de distância do Sol, como mostra a figura.

- Encontre a distância angular (α) a qual se veria, a partir da Terra, o raio do anel.
- Encontre o poder de resolução (θ) do telescópio Gemini Sul, de 8,1 m de diâmetro, no comprimento de onda $\lambda = 1,6 \times 10^{-6}$ m e responda se o anel é observável no referido comprimento de onda utilizando óptica adaptativa extrema.

Soluções: Astronomia

1) Alternativa A

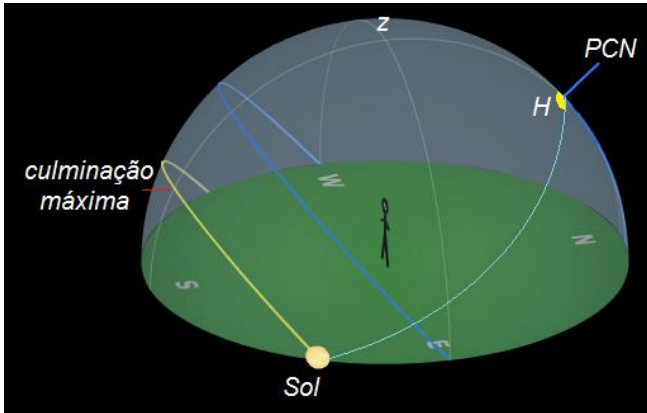
O dia 20/mar/2014 será dia de equinócio. O Sol nascerá no ponto cardinal Leste, e sua declinação será de 0° . Como as duas cidades se encontram dentro do mesmo fuso horário, a diferença de longitudes é então o que determina a diferença de horário de nascer do Sol entre elas nesse dia. Bertiooga está a leste de São Paulo, e portanto o Sol nascerá mais cedo em Bertiooga. A diferença de longitude é de $0,5^\circ$, o que equivale a uma diferença de 2 minutos de tempo ($24\text{h} = 360^\circ$). Assim, o horário de nascer do Sol será de, aproximadamente, 6h 08min em Bertiooga.

2) Alternativa B

São Paulo e Sydney estão em fusos horários diferentes. O fuso a que Sydney pertence tem meridiano central a 150° Leste de Greenwich, o que corresponde a uma diferença de +10h em relação ao GMT. O meridiano central do fuso de São Paulo está a 45° Oeste, o que corresponde a uma diferença de -3h em relação ao GMT. O horário de nascer do Sol em ambos os meridianos centrais é aproximadamente o mesmo. Assim, a diferença de horário de nascer do Sol entre São Paulo e Sydney é igual à diferença de horário de nascer do Sol entre São Paulo e o meridiano central de seu fuso somada à diferença de horário de nascer do Sol entre Sydney e o meridiano central de seu fuso. São Paulo se encontra a $1,6^\circ$ Oeste do meridiano central de seu fuso. O Sol nasce então

6min24s mais cedo no meridiano central, ou seja, às 06h10min12s – 06min24s = 06h03min48s. Sydney se encontra a 1,2° Leste do meridiano central de seu fuso. O Sol nasce então 4min48s mais cedo em Sydney em relação ao meridiano central, ou seja, 06h03min48s – 4min48s = 05h59min.

3) Representando o nascer do Sol no dia 21/dez ($\delta_{\text{Sol}} = -23,5^\circ$) na latitude indicada ($\varphi = 42,5^\circ$ N), temos:



Neste instante, o ângulo horário do Sol (H) será dado por:

$$\cos H = -\text{tg } \delta \cdot \text{tg } \varphi \Rightarrow H = 66,5^\circ$$

Logo, o intervalo de tempo para o Sol atingir a culminação máxima será:

$$\Delta t = \frac{24\text{h}}{360^\circ} \cdot 66,5 = 4\text{h}26\text{ min}$$

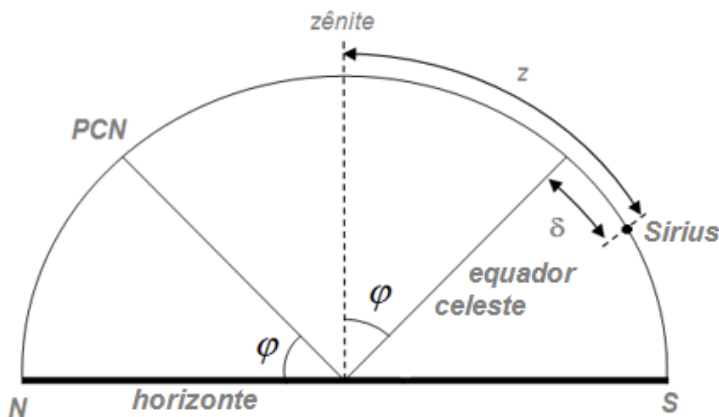
Já o tempo t que o Sol atinge a culminação máxima para o observador na longitude $\lambda = 71^\circ W$, ou seja, 4° a oeste do meridiano central $75^\circ W$, admitindo que o Sol cruze o meridiano central nesta data às 12h, será:

$$t = 12h - \frac{1h}{15^\circ} \cdot 4^\circ = 11h44 \text{ min}$$

Portanto, a hora que o Sol nasce no dia 21/dez é:

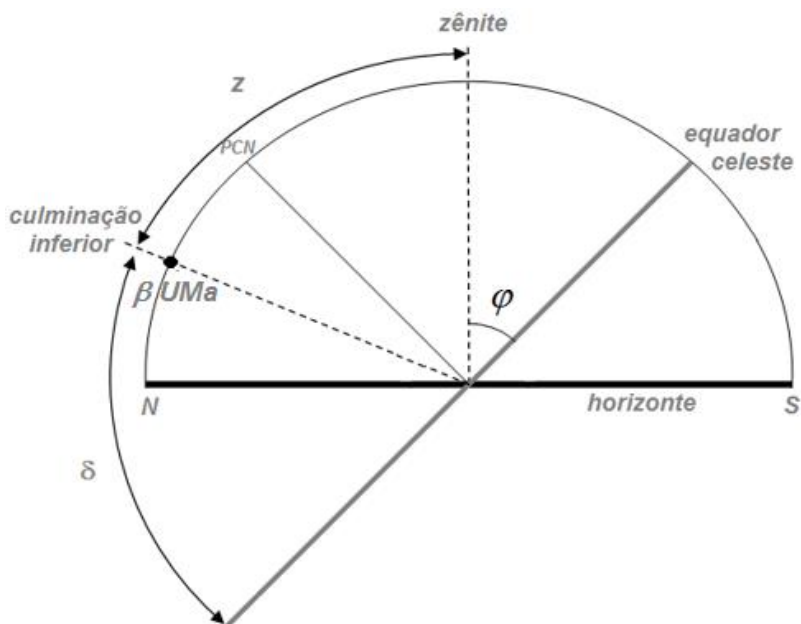
$$T_{\text{nasc}} = 11h44 \text{ min} - 4h26 \text{ min} \Rightarrow T_{\text{nasc}} = 7h18 \text{ min}$$

4) A latitude local φ coincide com a elevação, em relação ao horizonte, do polo celeste visível que neste caso é o polo celeste norte (PCN). Sabendo que o plano do equador celeste que é perpendicular ao eixo contém o PCN (eixo de rotação da esfera celeste), temos:



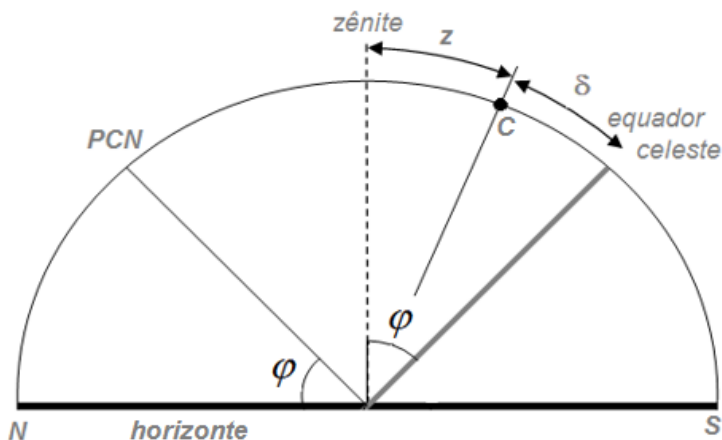
$$\varphi = z - |\delta| = 39^\circ 05' 34,4'' - 16^\circ 43' 24,6'' \Rightarrow \varphi = 22^\circ 22' 9,8'' N$$

5) Como a declinação de β Ursa Majoris (β UMa) é positiva, a estrela pertence ao hemisfério celeste norte. Representando o instante de culminação inferior, a latitude φ será dada por:



$$\varphi = 180^\circ - (z + \delta) = 180^\circ - (63^\circ 46' + 74^\circ 31') \Rightarrow \varphi = 41^\circ 43' N$$

6) Sendo C a posição do cometa ao cruzar o meridiano local, o que implica possuir ângulo horário (H) igual a zero, as coordenadas equatoriais serão dadas por:



Declinação (δ):

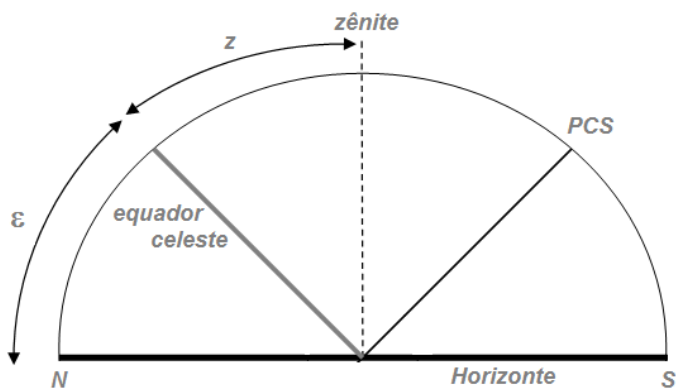
$$\delta = \varphi - z = 50^{\circ}27' - 3^{\circ}52' \Rightarrow \delta = 46^{\circ}35'$$

Ascensão Reta (α):

$$T_{SL} = H + \alpha \Rightarrow 15h15min10s = 0 + \alpha \Rightarrow \alpha = 15h15min10s$$

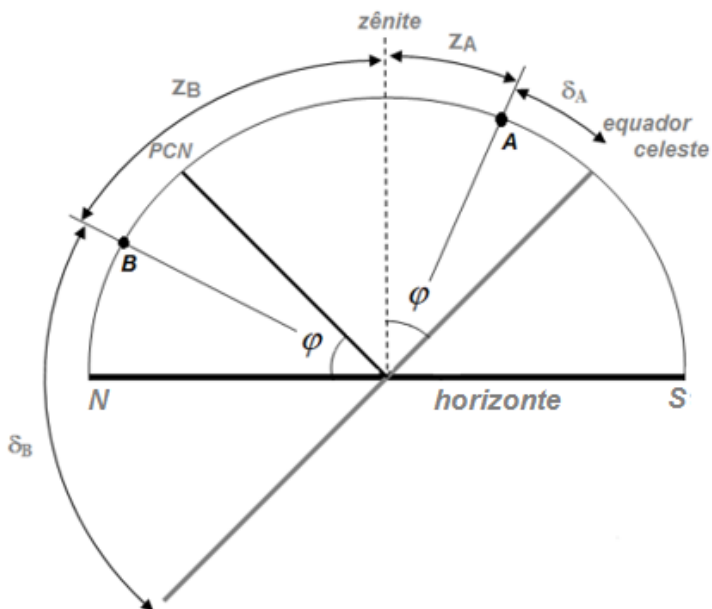
7) a) Como a estrela descreveu um arco de 180° acima do horizonte desde o instante do nascer até seu ocaso ela está sobre o equador celeste, ou seja, sua declinação é $\delta = 0^{\circ}$.

b) Sendo ε o ângulo entre o plano do equador celeste e o plano do horizonte, temos:



$$\varepsilon = 90^\circ - z = 90^\circ - 55^\circ \Rightarrow \boxed{\varepsilon = 35^\circ}$$

8) Considerando o instante que as estrelas A e B cruzam o meridiano local ($H = 0$), temos:



Declinação;

$$\delta_A = \varphi - z_A = 55^\circ 45' - 40^\circ \Rightarrow \delta_A = 15^\circ 45'$$

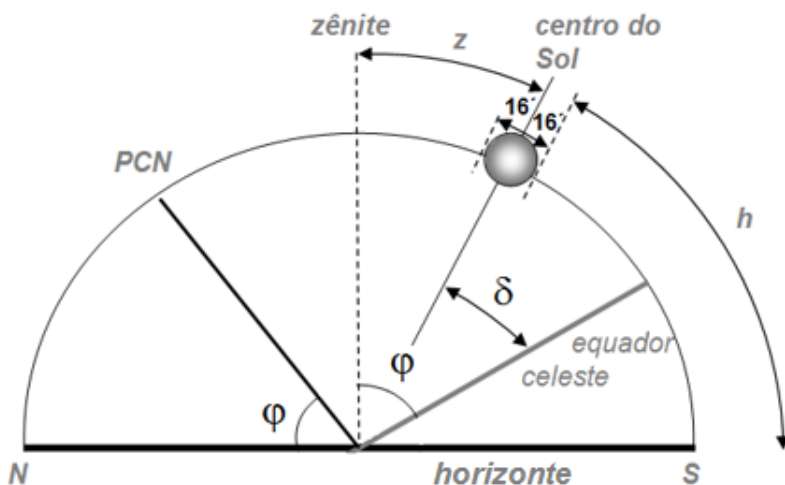
$$\delta_B = 180^\circ - (\varphi + z_B) = 180^\circ - (55^\circ 45' + 40^\circ) \Rightarrow \delta_B = 84^\circ 15'$$

Ascensão reta:

$$T_{SLA} = H + \alpha_A \Rightarrow \alpha_A = 7h35 \text{ min}$$

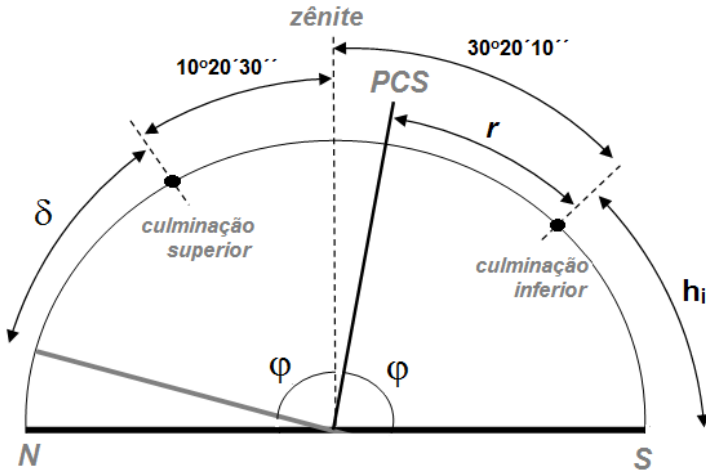
$$T_{SLB} = (H + \alpha_B) + 12h \Rightarrow \alpha_B = 19h35 \text{ min}$$

9) Considerando h a altura do bordo inferior do Sol neste instante, temos:



$$\begin{cases} z + 16' + h = 90^\circ \\ \varphi = z + \delta \end{cases} \Rightarrow \varphi = (90^\circ - 16' - 84^\circ 21') + 18^\circ 39' \Rightarrow \varphi = 24^\circ 02' N$$

10) Esquemáticamente, temos:



O polo celeste visível (PCS) é equidistante dos pontos de culminação. Portanto, a distância angular r pode ser determinada por:

$$r = \frac{10^{\circ}20'30'' + 30^{\circ}20'10''}{2} \Rightarrow r = 20^{\circ}20'20''$$

Sendo h_i a altura da estrela na situação de culminação inferior, o módulo da latitude local $|\varphi|$ será:

$$\begin{cases} |\varphi| = r + h_i \\ h_i = 90^{\circ} - 30^{\circ}20'10'' \end{cases} \Rightarrow |\varphi| = 20^{\circ}20'20'' + 59^{\circ}39'50'' \Rightarrow |\varphi| = 80^{\circ}0'10''$$

Como a observação foi realizada em um ponto do hemisfério Sul, temos que $\varphi = -80^{\circ}0'10''$ ou $\varphi = 80^{\circ}0'10''S$.

Já o módulo da declinação $|\delta|$ é:

$$|\delta| = |\varphi - 10^{\circ}20'30'' \Rightarrow |\delta| = 69^{\circ}39'40''$$

Sendo uma estrela pertencente ao hemisfério celeste sul, temos que $\delta = -69^{\circ}39'40''$.

11) O tempo sideral para o observador em Bogotá (T_{SL}), que está a oeste de Greenwich, é dado por:

$$\begin{aligned} T_{SL} = T_{SG} - \lambda &\Rightarrow T_{SL} = 12h30min - \frac{1h}{15^{\circ}} \cdot 74^{\circ}05' \Rightarrow \\ &\Rightarrow T_{SL} = 7h33min40s \end{aligned}$$

Logo, a ascensão reta α da estrela é:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} T_{SL} &= H + \alpha \\ H &= 45^{\circ}30' = 3h02min \end{aligned} \right\} &\Rightarrow 7h33min40s = 3h02min + \alpha \Rightarrow \\ &\Rightarrow \alpha = 4h31min40s \end{aligned}$$

12) a) O Sol está cruzando o meridiano local mais próximo ao ponto cardinal Norte, logo $A = 0^{\circ}$.

b) No solstício de junho a declinação do Sol é aproximadamente $\delta = +23^{\circ}27'$.

c) Como o Sol está cruzando o meridiano local, o ângulo horário é $H = 0$.

d) A altura h do Sol será dada por:

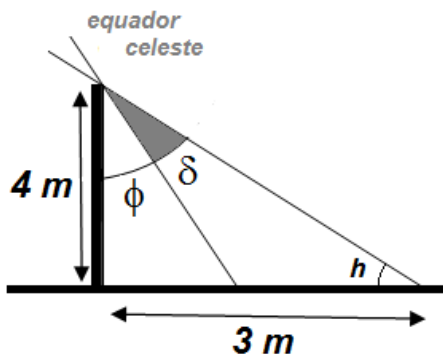
$$\operatorname{tg} h = \frac{4}{3} \Rightarrow h = 53^{\circ}7'48,4''$$

e) No solstício de junho a ascensão reta do Sol é $\alpha = 6h$.

f) O tempo sideral local será:

$$T_{SL} = H + \alpha \Rightarrow T_{SL} = 6h$$

g) Analisando a figura, temos que a latitude ϕ será:



$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\phi + \delta) = \frac{3}{4} \\ \delta = 23^{\circ}27' \end{array} \right. \Rightarrow \phi = 13^{\circ}25'12''S$$

13) a) Serão todas as estrelas que possuem declinação menor do que zero ($\delta < 0$), ou seja: Paecock, Rigel e Achernar.

b) Para não ser visível em Santiago, a estrela deve possuir declinação maior que 57° ($\delta > +57^{\circ}$). São elas: Alderamin e Polaris.

c) Para ser circumpolar em Montevideo, a estrela deve possuir declinação menor que -55° ($\delta < -55^\circ$). São elas: Peacock e Achernar.

d) Para fazer passagem meridiana próxima ao zênite na Cidade do México, a declinação da estrela deve ser próxima de 19° ($\delta \approx 19^\circ$), o que se verifica para Algeiba e Arcturus.

e) O Rio de Janeiro está a 2° a oeste do meridiano central 45° W, portanto a hora sideral do cruzamento da estrela deve ser $t = 2h30\text{ min} - \frac{60\text{ min}}{15^\circ} \cdot 2^\circ = 2h22\text{ min}$. No dia 21 de março ($\delta_{Sol} = 0^\circ$ e $AR_{Sol} = 0^\circ$) o ângulo horário do ponto vernal (tempo sideral local T_{SL}) neste instante é $T_{SL} = 12h + 2h22\text{ min} = 14h22\text{ min}$. Para a estrela fazer passagem meridiana ($H = 0$) neste instante, sua ascensão reta AR deve ser:

$$T_{SL} = H + AR \Rightarrow AR = 14h22\text{ min}$$

O que mais se aproxima a coordenada de Arcturus.

Como existe $\delta_{S\text{mínima}} \leq \delta'$, é possível criar uma situação que Sirius não nasça na Cracóvia.

- Para Canopus.

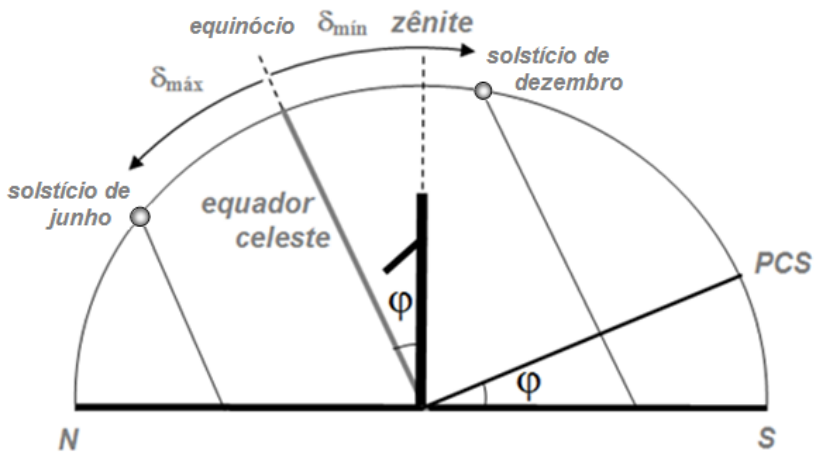
Impondo a situação limite para que Sirius não nasça ($\delta_{S\text{máxima}} = -39,9^\circ$) e a precessão do eixo da Terra correspondente ($\Delta\delta_{\text{precessão}}$), temos que nesta situação a declinação de Canopus (δ_{Canopus}) será:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} \delta_{\text{Canopus}} = \delta_{C\text{atual}} + \Delta\delta_{\text{precessão}} \\ \Delta\delta_{\text{precessão}} = \delta_{S\text{máxima}} - \delta_{S\text{atual}} \end{array} \right. &\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \delta_{\text{Canopus}} = -52\ 42' + \Delta\delta_{\text{precessão}} \\ \Delta\delta_{\text{precessão}} = -39,9^\circ - (-16^\circ 43') \end{array} \right. \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_{\text{Canopus}} = -75,9^\circ \end{aligned}$$

O que significa que Canopus também não irá nascer ($\delta_{\text{Canopus}} \leq \delta'$).

Portanto, não é possível uma situação na Cracóvia que Sirius não nasça e Canopus nasça e se ponha.

15) Representando o movimento anual do Sol ao cruzar o meridiano local no Observatório Nacional do Brasil ($\varphi = 22^{\circ}54'S$), temos;



Onde $\delta_{\min} = -23^{\circ}27'$ e $\delta_{\max} = +23^{\circ}27'$ são as declinações do Sol no solstício de dezembro e junho respectivamente.

a) Para declinações entre o equinócio de setembro ($\delta_{sol} = 0^{\circ}$) e o solstício de dezembro, em pelo menos uma parte do dia o relógio de Sol não irá funcionar, então:

$$-23^{\circ}27' \leq \delta < 0^{\circ}$$

b) Para declinações entre o instante que o Sol cruza o zênite ($\delta_{sol} = \varphi$) até o solstício de dezembro, o relógio não irá funcionar o dia todo, logo:

$$\delta_{\min} \leq \delta < \varphi \Rightarrow -23^{\circ}27' \leq \delta < -22^{\circ}54'$$

16) Alternativa B

Considerando o período orbital da Terra 365 dias, o período orbital de Vênus T_V será:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_T} \Rightarrow \frac{1}{584} = \frac{1}{T_V} - \frac{1}{365} \Rightarrow T_V = 224,6 \text{ dias}$$

Já o período orbital de Júpiter:

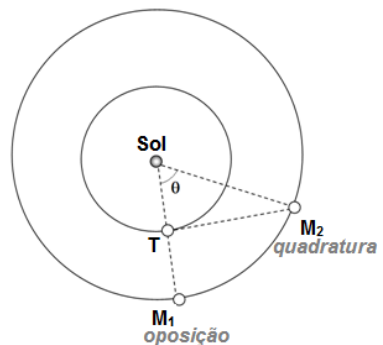
$$\frac{1}{\Delta t'} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_J} \Rightarrow \frac{1}{399} = \frac{1}{365} - \frac{1}{T_J} \Rightarrow T_J = 4283,4 \text{ dias}$$

Logo, o período sinódico de Júpiter tendo o Sol e Vênus como referências é aproximadamente:

$$\frac{1}{\Delta t''} = \frac{1}{T_V} - \frac{1}{T_J} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t''} = \frac{1}{224,6} - \frac{1}{4283,4} \Rightarrow \Delta t'' = 237 \text{ dias}$$

17) O período sinódico de Marte tendo a Terra e o Sol como referências é:

$$\frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M} \Rightarrow \frac{1}{\Delta t} = \frac{1}{365} - \frac{1}{687} \Rightarrow \Delta t = 779 \text{ dias}$$



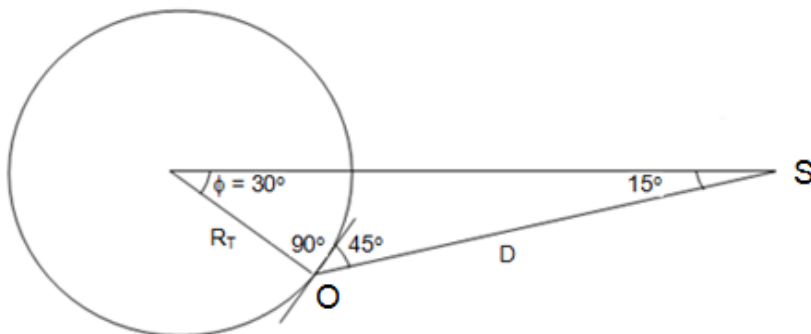
Logo, o ângulo θ entre as duas situações é:

$$\theta = \frac{360^\circ}{779 \text{ dias}} \cdot 106 \text{ dias} = 49^\circ$$

Chamando de a_T a distância Terra-Sol e a_M a distância Marte-Sol, da situação de quadratura, temos:

$$\cos \theta = \frac{a_T}{a_M} \Rightarrow \cos 49^\circ = \frac{1 \text{UA}}{a_M} \Rightarrow a_M = 1,52 \text{UA}$$

18) Representando a situação vista do espaço, onde O é a posição do observador e S é a posição do satélite, temos:



Logo, a distância D entre o satélite e o observador, pode ser obtida através da lei dos senos:

$$\frac{D}{\sin 30^\circ} = \frac{R_T}{\sin 15^\circ} \Rightarrow \frac{D}{0,5} = \frac{6400}{0,2588} \Rightarrow D = 12364 \text{ km}$$

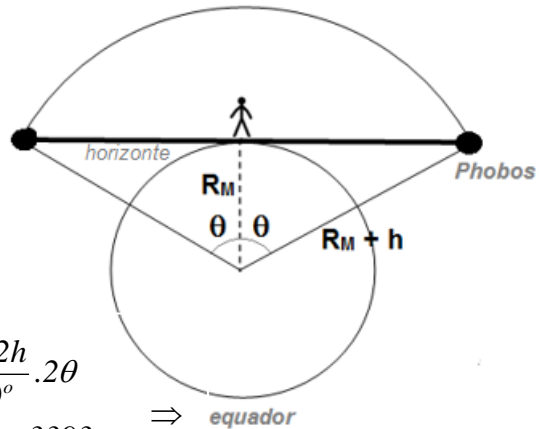
19) Considerando a massa de Phobos muito menor que a massa de Marte, da 3ª lei de Kepler temos que o período orbital de Phobos T_P é:

$$\frac{T_P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Marte}} \Rightarrow \frac{T_P^2}{(R_M + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Marte}} \Rightarrow T_P = 7,66h$$

Já o período sinódico de Phobos T_S , tendo Marte e um observador em sua superfície como referência, será:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_P} - \frac{1}{T_M} \Rightarrow \frac{1}{T_S} = \frac{1}{7,66} - \frac{1}{24,63} \Rightarrow T_S = 11,12h$$

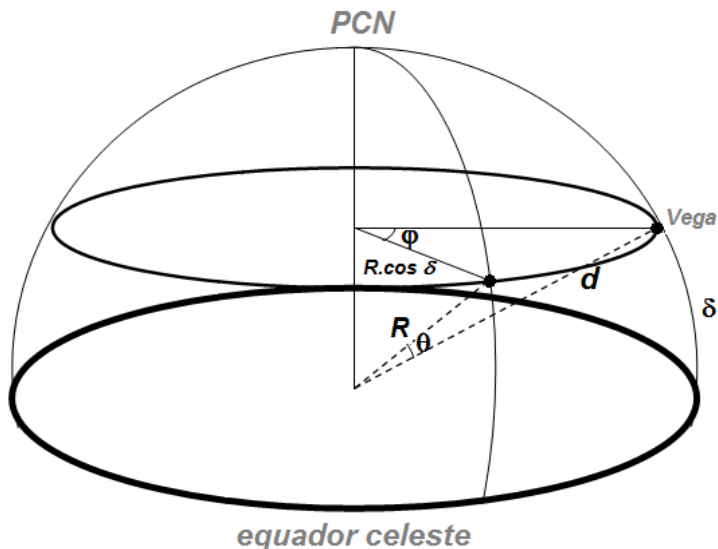
Analisando a figura ao lado, o tempo Δt que Phobos ficará acima do horizonte para o observador é:



$$\left| \begin{aligned} \Delta t &= \frac{11,12h}{360^\circ} \cdot 2\theta \\ \cos \theta &= \frac{R_M}{R_M + h} \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} \Delta t &= \frac{11,12h}{360^\circ} \cdot 2\theta \\ \cos \theta &= \frac{393}{393 + 5987} \end{aligned} \right. \Rightarrow \text{equador}$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{11,12h}{360^\circ} \cdot 2 \cdot 68,8^\circ \Rightarrow \Delta t = 4,25h$$

20) Sendo θ o ângulo do campo de visão do telescópio e d o deslocamento aparente de Vega em $\Delta t = 5,3 \text{ min}$, analisando a figura, temos:



$$d = \theta \cdot R$$

$$d = \varphi \cdot R \cos \delta$$

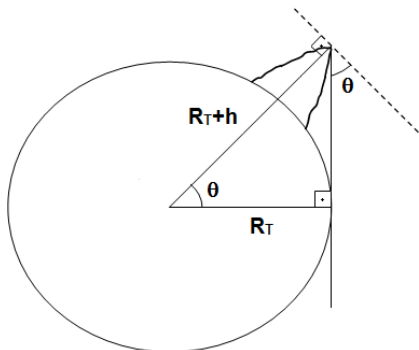
$$\varphi = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \quad \Rightarrow \quad \theta = \frac{2\pi}{T} \cdot \Delta t \cdot \cos \delta \Rightarrow$$

$$T = 23\text{h}56 \text{ min}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{2\pi}{(23 \cdot 60 + 56) \text{ min}} \cdot 5,3 \text{ min} \cdot \cos 39^\circ \Rightarrow$$

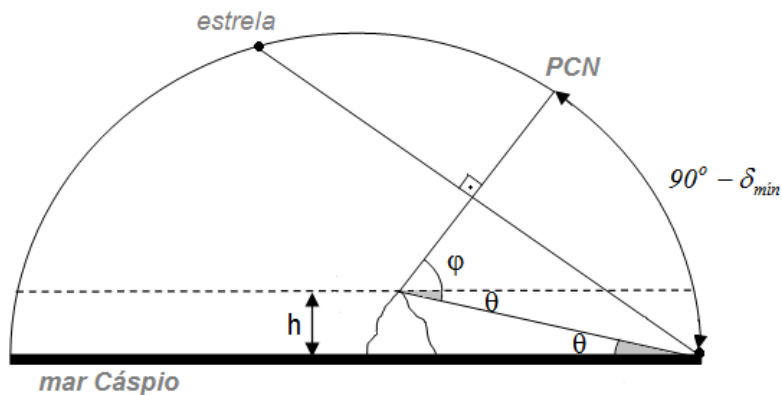
$$\Rightarrow \theta = 0,018 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \boxed{\theta = 62'}$$

21) O ângulo de depressão θ pode ser estimado por:



$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{R_T}{R_T + h} \Rightarrow \\ \Rightarrow \cos \theta &= \frac{6370,8}{6370,8 + 5,6} \Rightarrow \\ \Rightarrow \theta &= 2^\circ 24' \end{aligned}$$

Então, analisando a figura, temos:



$$\begin{aligned} 90^\circ - \delta_{\min} &= \varphi + \theta \Rightarrow \delta_{\min} = 90^\circ - 35^\circ 57' - 2^\circ 24' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \delta_{\min} = 51^\circ 39' \end{aligned}$$

22) Analisando os mares lunares mostrados na imagem (Serenidade, Tranquilidade, Fertilidade e Néctar) concluímos que o bordo (lado) ocidental da Lua está iluminado. Acompanhado da posição do terminador lunar (linha que separa o bordo iluminado do bordo não iluminado), temos que a Lua está próxima ao quarto crescente.

Como o céu está escuro e a Lua (na fase quarto crescente) está próxima ao horizonte, estima-se que são aproximadamente 0h. Portanto, ela está se pondo e o horizonte mostrado é o ocidental.

23) Considerando que o plano da órbita lunar está inclinado $5,14^\circ$ com o plano da eclíptica, o intervalo de declinações da Lua é:

$$\begin{aligned}\delta_{\min} < \delta_{\text{Lua}} < \delta_{\max} &\Rightarrow -23^\circ 26' - 5,14^\circ < \delta_{\text{Lua}} < -23^\circ 26' + 5,14^\circ \Rightarrow \\ &\Rightarrow -28,57^\circ < \delta_{\text{Lua}} < -18,29^\circ\end{aligned}$$

Sendo o tempo necessário para um astro surgir no horizonte e atingir a culminação máxima (H) dado por $\cos H = -\text{tg} \delta \cdot \text{tg} \varphi$, para a situação descrita, o valor máximo e mínimo é:

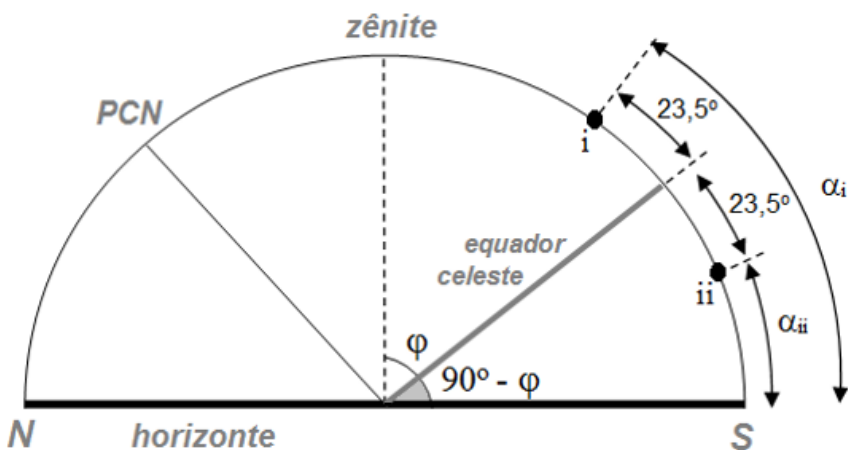
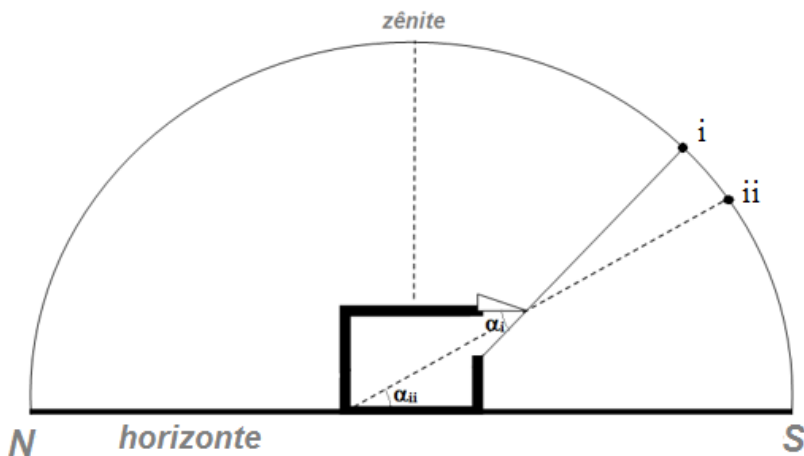
$$\cos H_{\max} = -\text{tg}(-28,57^\circ) \cdot \text{tg}(-6^\circ 49') \Rightarrow H_{\max} = 6\text{h}15\text{min}$$

$$\cos H_{\min} = -\text{tg}(-18,29^\circ) \cdot \text{tg}(-6^\circ 49') \Rightarrow H_{\min} = 6\text{h}09\text{min}$$

Como o tempo de permanência acima do horizonte (Δt) é 2H, o intervalo solicitado será:

$$12\text{h}18\text{min} < \Delta t < 12\text{h}30\text{min}$$

24) Considerando i a situação do Sol ao meio-dia no solstício de verão e ii o Sol a ao meio-dia no solstício de inverno no local de latitude $\varphi = 36^\circ N$, esquematicamente das condições impostas no enunciado, temos:

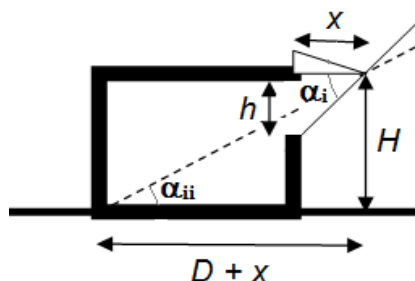


Da geometria do sistema, vem:

$$\alpha_i = (90^\circ - \varphi) + 23,5^\circ \Rightarrow \alpha_i = 77,5^\circ$$

$$\alpha_{ii} = (90^\circ - \varphi) - 23,5^\circ \Rightarrow \alpha_{ii} = 30,5^\circ$$

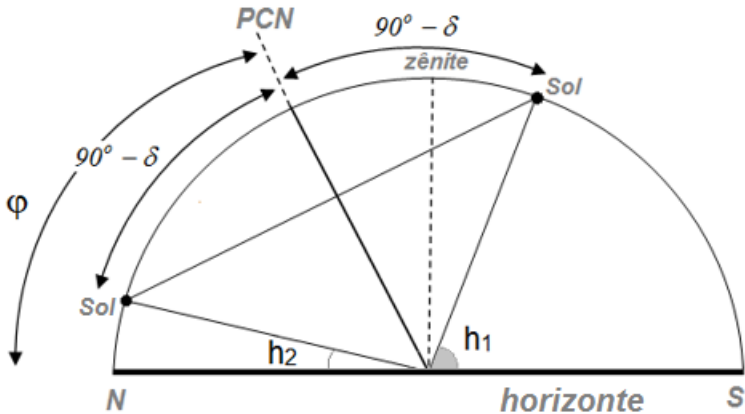
Logo:



$$\operatorname{tg} \alpha_{ii} = \frac{H}{D+x} \Rightarrow x = \frac{H}{\operatorname{tg} \alpha_{ii}} - D \Rightarrow x = 0,60\text{m}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_i = \frac{h}{x} \Rightarrow h = x \cdot \operatorname{tg} \alpha_i \Rightarrow h = 2,67\text{m}$$

25) Como o comprimento máximo da sombra da haste neste dia é finito, o Sol é circumpolar no local de observação, esquematicamente, temos:



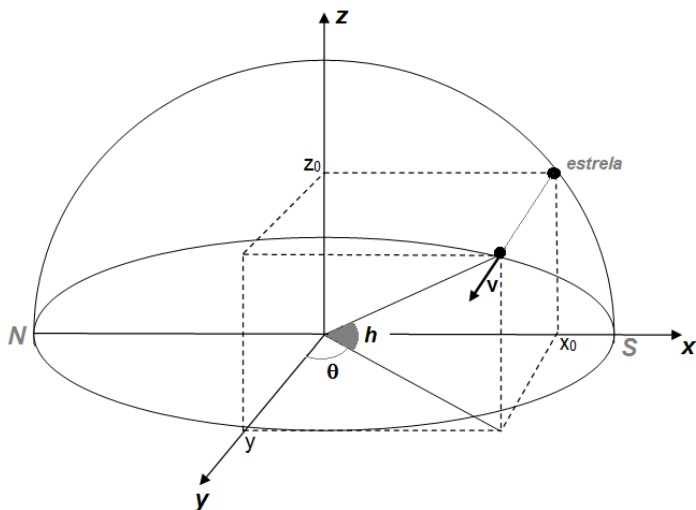
Onde h_1 e h_2 correspondem, respectivamente, a altura máxima e mínima do Sol e podem ser determinadas pela análise das sombras da haste:

$$\operatorname{tg} h_1 = \frac{1}{1,732} \Rightarrow h_1 = 30^\circ \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} h_2 = \frac{1}{5,671} \Rightarrow h_2 = 10^\circ$$

Portanto, analisando a figura, temos:

$$\begin{cases} h_1 + 90^\circ - \delta + \varphi = 180^\circ \\ h_2 + 90^\circ - \delta = \varphi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi - \delta = 60^\circ \\ \varphi + \delta = 100^\circ \end{cases} \Rightarrow \boxed{\varphi = 80^\circ} \quad \text{e} \quad \boxed{\delta = 20^\circ}$$

26) a) Esquemáticamente, temos:



É válido que:

$$\operatorname{tg} h = \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y^2}} \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{x_0}{y}$$

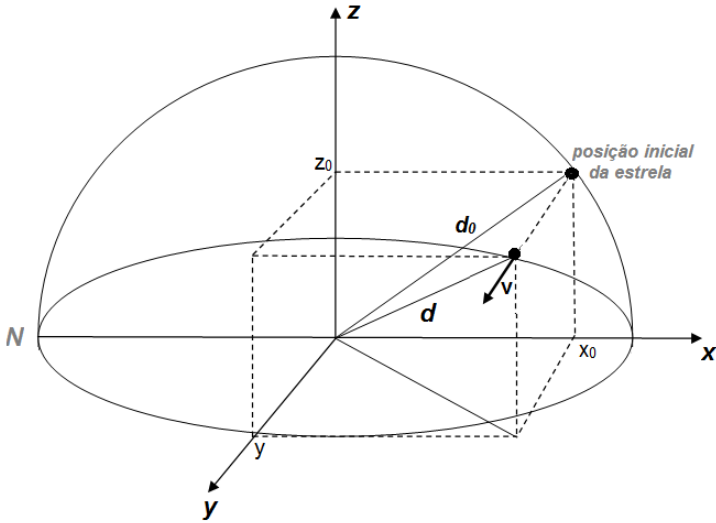
Como z_0 e x_0 são constantes, para $y \rightarrow \infty$, temos:

$$\boxed{h = 0^\circ} \quad \text{e} \quad \theta = 0^\circ$$

Portanto, considerando a contagem do azimute (A) a partir do ponto cardinal Norte para leste, quando $\theta = 0^\circ$, temos:

$$\boxed{A = 270^\circ}$$

b) Considerando que no instante que a estrela atinge a magnitude 6 ela está a uma distância d do observador, temos:



$$\begin{aligned} m_1 - m_2 &= -2,5 \log \left(\frac{F_1}{F_2} \right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \log \left(\frac{L}{4\pi \cdot d_0^2} \cdot \frac{4\pi \cdot d^2}{L} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow m_1 - m_2 &= -2,5 \log \left(\frac{d}{d_0} \right)^2 \Rightarrow 0,45 - 6 = -5 \log \left(\frac{d}{d_0} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow d = 12,9 \cdot d_0 \end{aligned}$$

Como o movimento da estrela ao longo do eixo y acontece de forma retilínea e uniforme $\left(v = \frac{2\pi}{T} \cdot d_0 \right)$ a equação horária da estrela neste eixo é:

$$y = y_0 + v.t \Rightarrow y = 2\pi.d_0.t \quad (\text{com } v \text{ dado em } d_0 / \text{Idia})$$

Então:

$$\begin{aligned} d^2 &= x_0^2 + y^2 + z_0^2 \Rightarrow d^2 = (x_0^2 + z_0^2) + y^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow d^2 &= d_0^2 + y^2 \Rightarrow (12,9.d_0)^2 = d_0^2 + (2\pi.d_0.t)^2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = 2,045 \text{ dias} \end{aligned}$$

Soluções: Astrofísica

Comentário: Sempre que necessário, consulte a tabela de constantes. Alguns valores foram aproximados nas resoluções.

1) a) Considerando que o raio orbital, soma do raio da Terra mais a altura em relação a superfície, triplicou, a variação da energia mecânica do satélite será:

$$\Delta E_{mec} = -\frac{GMm}{2r_f} + \frac{GMm}{2r_i} = \frac{GMm}{2} \left(\frac{1}{r_i} - \frac{1}{3r_i} \right) \Rightarrow \Delta E_{mec} = \frac{GMm}{2} \cdot \frac{2}{3r_i} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta E_{mec} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 3 \cdot 10^2}{3 \cdot (6,4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)} = \boxed{5,8 \cdot 10^9 \text{ J}}$$

b) Como a massa do satélite é muito menor que a massa da Terra, da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{r_f^3} \Rightarrow \frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{(3r_i)^3} \Rightarrow \boxed{\frac{P_i}{P_f} = 0,19}$$

c) Para escapar da órbita, é necessário que $\Delta E_{mec} = 0 \Rightarrow K = -U$, então:

$$\frac{m \cdot v_{esp}^2}{2} = -\left(-\frac{GMm}{r}\right) \Rightarrow v_{esp} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Portanto:

$$\frac{v_{esp\ i}^2}{v_{esp\ f}^2} = \frac{\frac{2GM}{r_i}}{\frac{2GM}{3r_i}} \Rightarrow \frac{v_{esp\ i}}{v_{esp\ f}} = \sqrt{3}$$

2) a) Considerando apenas a influência do Sol, a energia mecânica do sistema será:

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{GM_{Sol} \cdot m}{r} = m \cdot \left(\frac{v^2}{2} - \frac{G \cdot M_{Sol}}{r} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{mec} &= m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{47 \cdot 10^3}{3,6} \right)^2 - \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(150 - 3,4) \cdot 10^9} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{mec} &\approx -8,21 \cdot 10^8 \cdot m \end{aligned}$$

Como a $E_{mec} < 0$, temos que a órbita é elíptica.

b) Considerando apenas a influência da Terra, a energia mecânica do sistema será:

$$\begin{aligned} E_{mec} &= \frac{m.v^2}{2} - \frac{GM_{Terra}.m}{r} = m \left(\frac{v^2}{2} - \frac{G.M_{Terra}}{r} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow E_{mec} &= m \left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{47.10^3}{3,6} \right)^2 - \frac{6,67.10^{-11} \cdot 6.10^{24}}{3,4.10^9} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_{mec} \approx 8,51.10^7 .m \end{aligned}$$

Como a $E_{mec} > 0$, temos que a órbita é hiperbólica.

3) Considerando a situação que um objeto é abandonado na extremidade livre da nuvem ($v_{ext} = 0$), sua energia potencial ao atingir o centro (U_{centro}) será:

$$\begin{aligned} E_{ext} = E_{centro} &\Rightarrow \frac{m.v_{ext}^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{m.v_{centro}^2}{2} + U_{centro} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{GMm}{R} &= \frac{GMm}{2R} + U_{centro} \Rightarrow U_{centro} = -\frac{3}{2} \frac{GMm}{R} \end{aligned}$$

Portanto, nas condições de escape ($E_{mec} = 0$), temos:

$$\frac{m.v_{esp}^2}{2} + U_{centro} = 0 \Rightarrow \frac{m.v_{esp}^2}{2} - \frac{3}{2} \frac{GMm}{R} = 0 \Rightarrow v_{esp} = \sqrt{\frac{3GM}{R}}$$

4) A velocidade de um astro em órbita elíptica kepleriana é dada por:

$$E_{mec} = K + U \Rightarrow -\frac{GMm}{2a} = \frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow v^2 = GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Onde: r é a distância entre os centros de massa dos corpos envolvidos e a é o semi-eixo orbital.

A velocidade máxima (v_M) e mínima (v_m) acontece no periastro e apoastro respectivamente. Nestes pontos $r_M = a(1 - e)$ e $r_m = a(1 + e)$, onde e é a excentricidade orbital. Logo:

$$v_M^2 = GM \left(\frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \cdot \frac{(1 + e)}{(1 - e)}$$

$$v_m^2 = GM \left(\frac{2}{a(1 + e)} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM}{a} \cdot \frac{(1 - e)}{(1 + e)}$$

Da 3ª Lei de Kepler, vem que: $GM = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{P^2}$, então:

$$v_M \cdot v_m = \frac{GM}{a} \Rightarrow v_M \cdot v_m = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{P^2} \cdot \frac{1}{a} \Rightarrow a = P \cdot \frac{\sqrt{v_M \cdot v_m}}{2\pi}$$

5) a) Da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{(P + \Delta P)^2}{(a + \Delta a)^3} \Rightarrow \frac{P^2 + 2P \cdot \Delta P + \Delta P^2}{P^2} = \frac{a^3 + 3a^2 \cdot \Delta a + 3a \cdot \Delta a^2 + \Delta a^3}{a^3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 1 + \frac{2\Delta P}{P} + \frac{\Delta P^2}{P^2} = 1 + \frac{3\Delta a}{a} + \frac{3\Delta a^2}{a^2} + \frac{\Delta a^3}{a^3}$$

Como $\Delta a \ll a$ e $\Delta P \ll P$, o afastamento Δa será:

$$\frac{2\Delta P}{P} = \frac{3\Delta a}{a} \Rightarrow \Delta a = \frac{2}{3} \frac{\Delta P \cdot a}{P} \Rightarrow \Delta a = \frac{2}{3} \cdot \frac{0,12 \cdot (6380 + 400) \cdot 10^3}{5544} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta a = 97,83m$$

b) Velocidade do satélite:

$$v_s = \frac{2\pi \cdot a}{P} = \frac{2\pi \cdot (6380 + 400) \cdot 10^3}{5544} \Rightarrow v_s = 7683,982 \text{ m/s}$$

Velocidade do astronauta:

$$v_a = \frac{2\pi \cdot (a + \Delta a)}{P + \Delta P} = \frac{2\pi \cdot (6738 + 97,83) \cdot 10^3}{5544,12} \Rightarrow v_a = 7683,927 \text{ m/s}$$

c) O tempo necessário para o astronauta chegar ao satélite é:

$$v = \frac{\Delta a}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{97,83}{10} \Rightarrow \Delta t = 9,783s$$

Logo, como a diferença entre as velocidades tangenciais é de 0,055 m/s, o desvio em relação ao meio do satélite será de 0,538 m. Portanto, o astronauta irá conseguir realizar a ancoragem (desvio menor que 6 m).

6) a) Da conservação do momento angular e também da energia, a velocidade v_T com que a nave deve sair da Terra é:

$$\left| \begin{array}{l} m.v_T \times R_T = m.v_M \times R_M \\ \frac{m.v_T^2}{2} - \frac{G.M_S.m}{R_T} = \frac{m.v_M^2}{2} - \frac{G.M_S.m}{R_M} \Rightarrow \end{array} \right. \begin{array}{l} v_M = \frac{R_T.v_T}{R_M} \\ v_T^2 - v_M^2 = 2GM_S \left(\frac{R_M - R_T}{R_T.R_M} \right) \Rightarrow \end{array}$$
$$\Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{2GM_S.R_M}{R_T.(R_M + R_T)}}$$

Antes de calcular a velocidade que se deve impulsionar a nave, recordemos que a velocidade orbital de Terra é

dada por $V_T = \sqrt{\frac{G.M_S}{R_T}}$. Comparando as duas equações,

vemos que $V_T > v_T$, logo a nave deve ser freada, isto é, a nave deve ser lançada em direção oposta a velocidade orbital da Terra. Então:

$$\Delta v = V_T - v_T = \sqrt{\frac{G.M_S}{R_T}} - \sqrt{\frac{2GM_S.R_M}{R_T.(R_M + R_T)}} \Rightarrow \Delta v \approx 3.10^5 \text{ m/s}$$

b) O semieixo maior da órbita da nave é dado por:

$$a = \frac{0,4 + 1}{2} = 0,7UA$$

Da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$T^2 = a^3 \Rightarrow T^2 = 0,7^3 \Rightarrow T = 0,58\text{anos} = 213,7\text{dias}$$

Logo:

$$t = \frac{T}{2} = \frac{213,7}{2} = 106,9\text{dias}$$

7) a) Da geometria da elipse, temos que o semieixo maior será:

$$a = \frac{1,5 + 1}{2} \Rightarrow a = 1,25UA$$

Já a excentricidade é:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{(1,5 - 1,25)}{1,25} \Rightarrow e = 0,2$$

b) Para o semieixo maior medido em unidades astronômicas (UA), o período orbital em anos e considerando que a massa da sonda é muito menor que a massa do Sol, da 3ª Lei de Kepler para a situação, vem:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_{Sol}} = 1 \Rightarrow GM_{Sol} = 4\pi^2 = \mu$$

Portanto, a velocidade de saída v_s da sonda ($r = 1UA; a = 1,25UA$) é:

$$v_s^2 = 4\pi^2 \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{1,25} \right) \Rightarrow v_s = 6,88 \frac{UA}{ano}$$

A velocidade v_T de translação da Terra ($r = 1UA; a = 1UA$):

$$v_T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{2}{1} - \frac{1}{1} \right) \Rightarrow v_T = 6,28 \frac{UA}{ano}$$

Logo:

$$|\Delta v| = |v_s - v_T| \Rightarrow \Delta v = 0,6 \frac{UA}{ano} = 2,85 \frac{km}{s}$$

c) O período orbital da sonda é:

$$P^2 = a^3 \Rightarrow P^2 = 1,25^3 \Rightarrow P = 1,4 \text{ ano}$$

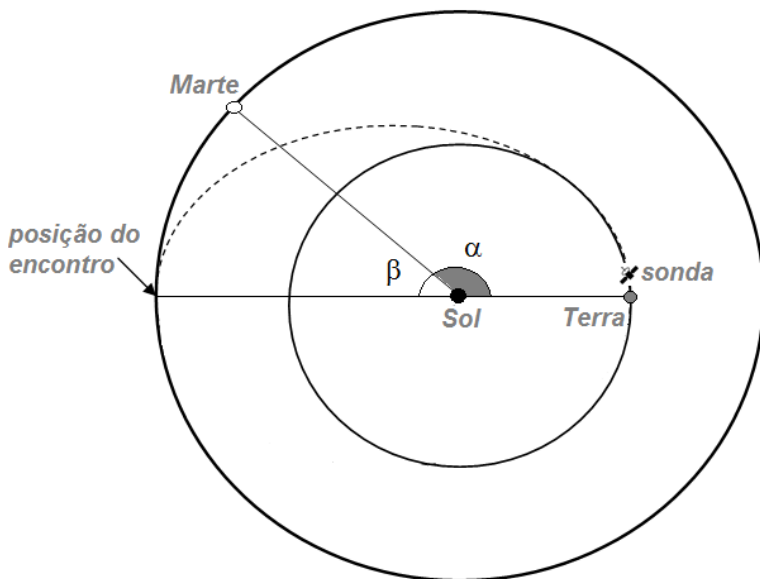
Portanto, o tempo de viagem será:

$$\Delta t = \frac{P}{2} = 0,7 \text{ ano}$$

d) O período orbital de Marte é:

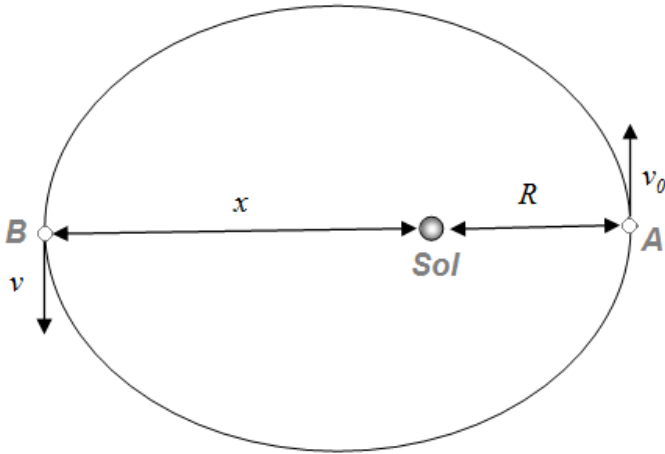
$$P_M^2 = a_M^3 \Rightarrow P_M^2 = 1,5^3 \Rightarrow P = 1,837 \text{ ano}$$

Sendo α a diferença entre as longitudes eclípticas entre Marte e a Terra no instante do disparo, da geometria da situação, temos:



$$\left| \begin{array}{l} \alpha + \beta = 180^\circ \\ \beta = \frac{360^\circ}{1,837} \cdot 0,7 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha + 137,2^\circ = 180^\circ \Rightarrow \boxed{\alpha = 42,8^\circ}$$

8) O esquema abaixo ilustra a Terra, de massa m , na situação em que se encontra em sua maior proximidade ao Sol (ponto A) e maior afastamento (ponto B). Da conservação do momento angular, temos:



$$L_A = L_B \Rightarrow m \cdot v_0 \times R = m \cdot v \times x \Rightarrow v = \frac{v_0 \cdot R}{x}$$

Da conservação da energia entre os pontos A e B, vem:

$$\begin{aligned} -\frac{GMm}{R} + \frac{m \cdot v_0^2}{2} &= -\frac{GMm}{x} + \frac{m \cdot v^2}{2} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{x} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} + \frac{GM}{x} &= \frac{v^2}{2} \Rightarrow \frac{v_0^2}{2} - \frac{GM}{R} + \frac{GM}{x} = \frac{v_0^2 R^2}{2x^2} \end{aligned}$$

Multiplicando os dois lados por $2x^2$, temos:

$$\begin{aligned} v_0^2 \cdot x^2 - 2x^2 \cdot \frac{GM}{R} + 2x \cdot GM &= v_0^2 \cdot R^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(v_0^2 - 2 \cdot \frac{GM}{R} \right) \cdot x^2 + 2GM \cdot x - v_0^2 \cdot R^2 &= 0 \end{aligned}$$

Resolvendo a equação de 2º grau anterior, vem:

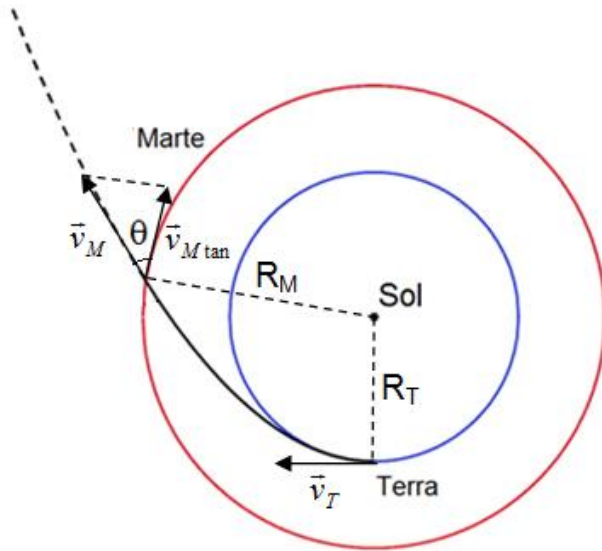
$$x = \frac{R^2 \cdot v_0^2}{2GM - v_0^2 \cdot R} \text{ (apogeu)} \quad \text{e} \quad x' = R \text{ (perigeu)}$$

Portanto, apenas a solução $x = \frac{R^2 \cdot v_0^2}{2GM - v_0^2 \cdot R}$ satisfaz a questão.

9) Considerando a trajetória da nave uma parábola ($E_{\text{mec}} = 0$) e apenas o efeito gravitacional com o Sol, a velocidade de saída da Terra v_T e a velocidade de cruzamento com a órbita de Marte v_M podem ser expressas por:

$$\frac{m \cdot v_T^2}{2} - \frac{GMm}{R_T} = 0 \Rightarrow v_T = \sqrt{\frac{2GM}{R_T}}$$
$$\frac{m \cdot v_M^2}{2} - \frac{GMm}{R_M} = 0 \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{2GM}{R_M}}$$

Sendo $v_{M \text{ tan}}$ a componente tangencial a órbita de Marte, da conservação do momento angular, vem:



$$L_T = L_M \Rightarrow m \cdot v_T \times R_T = m \cdot v_{M \tan} \times R_M \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_{M \tan} = \frac{v_T \cdot R_T}{R_M}$$

Logo, o ângulo θ será dado por:

$$\cos \theta = \frac{v_{M \tan}}{v_M} \Rightarrow \cos \theta = \frac{v_T \cdot R_T}{R_M} \cdot \sqrt{\frac{R_M}{2GM}} = \frac{\sqrt{2GM}}{\sqrt{R_T}} \cdot \frac{R_T}{R_M} \cdot \frac{\sqrt{R_M}}{\sqrt{2GM}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \sqrt{\frac{R_T}{R_M}} = \sqrt{\frac{1}{1,5}} \Rightarrow \theta = 35,26^\circ$$

10) a) A energia mecânica do sistema pode ser descrita como:

$$E_{total} = \frac{m.v^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow E_{total} = \frac{p^2}{2m} - GMm.u$$

Como o sistema é conservativo ($E_{mecA} = E_{mecB}$), temos:

$$\begin{aligned} \frac{p_A^2}{2m} - GMm.u_A &= \frac{p_B^2}{2m} - GMm.u_B \Rightarrow GMm.(u_B - u_A) = \frac{p_B^2 - p_A^2}{2m} \Rightarrow \\ \Rightarrow m &= \sqrt{\frac{p_B^2 - p_A^2}{2GM(u_B - u_A)}} \Rightarrow m = 5.10^4 \text{ kg} \end{aligned}$$

b) A energia total do sistema é:

$$E_{total} = E_{mecA} = \frac{p_A^2}{2m} - GMm.u_A \Rightarrow E_{total} = -1.10^{12} \text{ J}$$

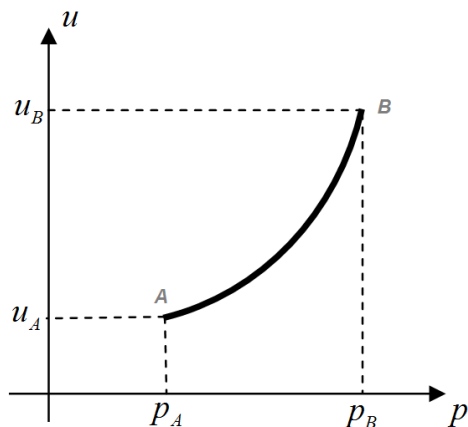
Como a $E_{total} < 0$, o objeto possui órbita elíptica.

c) É válido que:

$$E_{total} = \frac{p^2}{2m} - GMm.u \Rightarrow GMm.u = \frac{p^2}{2m} - E_{total}$$

Como $E_{total} < 0$, temos:

$$u = \frac{p^2}{2m^2GM} + E_{total} \text{ (equação de 2º grau)}$$



11) a) Como 1 Taris-ano são 10 Taris-dias, Taris realiza 10+1 rotações em 1 Taris-ano. Portanto, Taris realiza 11 rotações completas em 10 Taris-dias.

b) Da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P_{EN}^2}{a_{EN}^3} = \frac{P_{EX}^2}{a_{EX}^3} \Rightarrow \frac{0,2^2}{1^3} = \frac{1,6^2}{a_{EX}^3} \Rightarrow a_{EX} = 4 \text{ Endor - comprimento}$$

c) Da 3ª lei de Kepler, temos:

$$\frac{P_C^2}{a_C^3} = \frac{P_T^2}{a_T^3} \Rightarrow \frac{P_C^2}{(9)^3} = \frac{1^2}{1^3} \Rightarrow P_C = 27 \text{ Taris - anos}$$

d) Na situação de oposição, a distância será 8 Taris-comprimento.

Para “n” dias depois, analisando Taris (T'), o ângulo c será dado por:

$$2\pi \rightarrow 10\text{Taris} - \text{dias}$$

$$c + f \rightarrow n \quad \Rightarrow c = \frac{2\pi n}{10} - \frac{2\pi n}{270} \Rightarrow c = \frac{52\pi n}{270}$$

$$c + f = \frac{2\pi n}{10}$$

Vamos agora expressar o ângulo a em função de “n”.

Aplicando a lei dos senos no $\Delta ST'C'$, temos:

$$\frac{\text{sen } a}{1} = \frac{\text{sen } b}{9} \Rightarrow 9 \cdot \text{sen } a = \text{sen } b$$

Da figura:

$$\begin{cases} b + d + e = \pi \\ a + b + c = \pi \\ d = c + f \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = \pi - b - d = \pi - b - c - f \\ b = \pi - (a + c) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e = a - f \\ b = \pi - \left(a + \frac{52\pi n}{270} \right) \end{cases}$$

Unindo as equações anteriores:

$$9 \text{sen } a = \text{sen } b \Rightarrow 9 \text{sen } a = \text{sen} \left(\pi - \left(a + \frac{52\pi n}{270} \right) \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \text{sen } a = \text{sen} \left(a + \frac{52\pi n}{270} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9 \text{sen } a = \text{sen } a \cdot \cos \left(\frac{52\pi n}{270} \right) + \cos a \cdot \text{sen} \left(\frac{52\pi n}{270} \right)$$

Dividindo a equação anterior por $\operatorname{sen} a$, vem:

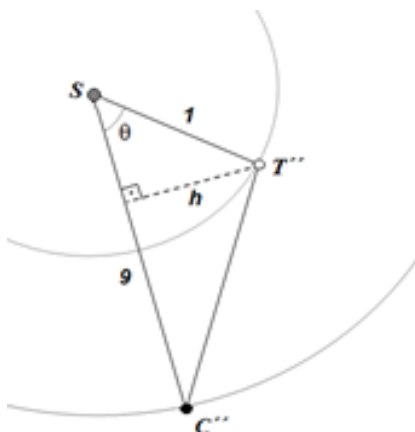
$$9 = \cos\left(\frac{52\pi n}{270}\right) + \cot g a \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{52\pi n}{270}\right) \Rightarrow$$
$$\cot g a = \frac{9 - \cos\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{52\pi n}{270}\right)} \Rightarrow a = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}{9 - \cos\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}\right)$$

Portanto, após “n” dias, a nova longitude λ de Corulus será:

$$\lambda = \pi - e \Rightarrow \lambda = \pi + f - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \pi + \frac{2\pi n}{270} - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}{9 - \cos\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}\right)$$

f) Analisando a figura abaixo, a área solicitada é dada por:



$$A = \frac{9h}{2} = \frac{9 \cdot l \cdot \text{sen} \theta}{2}$$

Do item anterior (e), temos que o ângulo θ equivale a c para $n = 1$. Logo:

$$\left| \begin{array}{l} \theta = \frac{52\pi}{270} \\ A = \frac{9 \cdot \text{sen} \theta}{2} \end{array} \right. \Rightarrow A = 2,56 \text{ Taris} - \text{comprimento}^2$$

12) Considerando Antares uma esfera com momento de inércia $I = \frac{2}{5} \cdot MR^2$, da conservação do momento angular, temos:

$$\left. \begin{array}{l} L_i = L_f \\ L = I \times \omega \Rightarrow \frac{2}{5} M_i \cdot R_i^2 \cdot \omega_i = \frac{2}{5} M_f \cdot R_f^2 \cdot \omega_f \Rightarrow \\ \omega = \frac{v}{R} = 2\pi \cdot f \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow M_i \cdot R_i^2 \cdot \frac{v_i}{R_i} = M_f \cdot R_f^2 \cdot 2\pi \cdot f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15,5 \cdot M_{Sol} \cdot 700 \cdot R_{Sol} \cdot 3,4 \cdot 10^3 = 4 \cdot M_{Sol} \cdot (4 \cdot 10^8)^2 \cdot 2\pi \cdot f \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 6,38 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$$

13) a) A magnitude absoluta de Sirius é:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow -1,5 - M = 5 \log 2,6 - 5 \Rightarrow M = 1,42$$

b) A luminosidade de Sirius em relação ao Sol será:

$$M_{Sol} - M = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_{Sol}}{L} \right) \Rightarrow 4,82 - 1,42 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_{Sol}}{L} \right) \Rightarrow \frac{L}{L_{Sol}} = 22,9$$

c) Comparando as luminosidades, temos:

$$\frac{L}{L_{Sol}} = \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot R_{Sol}^2 \cdot \sigma \cdot T_{Sol}^4} \Rightarrow 22,9 = \left(\frac{R}{R_{Sol}} \right)^2 \cdot \left(\frac{10000}{5800} \right)^4 \Rightarrow \frac{R}{R_{Sol}} = 1,6$$

14) a) Para manter sua magnitude bolométrica inalterada, a estrela deverá manter o fluxo luminoso constante ($F_A = F_B$):

$$\frac{L_B}{L_A} = \frac{4\pi.R_B^2.\sigma.T_B^4}{4\pi.R_A^2.\sigma.T_A^4} \Rightarrow \frac{L_B}{L_A} = \left(\frac{150R}{R}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{4T}\right)^4 \Rightarrow \frac{L_B}{L_A} = \left(\frac{150}{16}\right)^2$$

$$F_A = F_B \Rightarrow \frac{L_A}{4\pi d_A^2} = \frac{L_B}{4\pi d_B^2} \Rightarrow \left(\frac{d_B}{d_A}\right)^2 = \frac{L_B}{L_A} \Rightarrow \frac{d_B}{30pc} = \frac{150}{16} \Rightarrow \\ \Rightarrow d_B = 281,25pc$$

b) O tempo máximo da vida dessa estrela pode ser estimado por:

$$\left| \begin{array}{l} L = \frac{0,9\%E}{\Delta t} \\ E = m.c^2 \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t = \frac{0,9\%m.c^2}{L} \Rightarrow \Delta t = 1,08.10^{17} s \text{ ou } 3,42.10^9 \text{ anos}$$

15) A relação entre os fluxos das estrelas é:

$$m_A - m_B = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_A}{F_B}\right) \Rightarrow 2 - 3 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_A}{F_B}\right) \Rightarrow F_A = 10^{2/5} F_B$$

Como a magnitude combinada máxima está associada a soma dos fluxos ($F_C = F_A + F_B$), temos:

$$m_C - m_A = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_C}{F_A}\right) \Rightarrow m_C - 2 = -\frac{5}{2} \log\left(1 + \frac{F_B}{F_A}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_C = 2 - \frac{5}{2} \log(1 + 10^{-2/5}) \Rightarrow m_C = 1,64$$

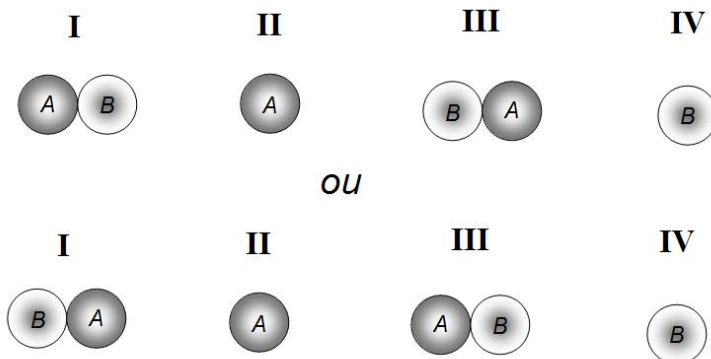
16) Pelo diagrama HR, uma estrela G2V é do mesmo tipo que o Sol. Portanto, no caso limite de visibilidade, vale:

$$M_{Sol} - m_{lim} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_{Sol}}{F_{lim}}\right) \Rightarrow -26,6 - 6 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{1,37 \cdot 10^3}{F_{lim}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_{lim} = 1,04 \cdot 10^{-10} \frac{W}{m^2}$$

Então:

$$F_{lim} = \frac{n \cdot E_{fóton}}{A_{olho}} \Rightarrow F_{lim} = \frac{n}{\pi \cdot r^2} \cdot \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{F_{lim} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot \lambda}{hc} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow n \approx 8000 \text{ fótons}$$

17) a) A seguir seguem dois esquemas possíveis. Sendo A a estrela menos brilhante e B a estrela mais brilhante, para cada ponto, temos:



b) Como a profundidade de cada mínimo é definida pela diferença entre a magnitude aparente da estrela e a magnitude aparente total da binária, para o mínimo primário, temos:

$$\Delta mag_1 = m_A - m_{tot} = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_A}{F_{tot}} \right) \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_A}{4\pi \cdot d^2} \cdot \frac{4\pi \cdot d^2}{L_{tot}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_A}{L_{tot}} \right)$$

Analogamente, para o mínimo secundário, vem:

$$\Delta mag_2 = m_B - m_{tot} = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{F_B}{F_{tot}} \right) \Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_B}{4\pi \cdot d^2} \cdot \frac{4\pi \cdot d^2}{L_{tot}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_B}{L_{tot}} \right)$$

c) Para o mínimo primário, temos:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_A}{L_{tot}} \right) \\ L_{tot} = L_A + L_B \quad \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_A}{L_A + L_B} \right) \Rightarrow \\ L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left(1 + \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4}{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_B^4} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log \left(1 + \left(\frac{5000}{12000} \right)^4 \right) \Rightarrow \Delta mag_1 = 3,8$$

Analogamente, para o mínimo secundário, vem:

$$\Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log \left(\frac{L_B}{L_A + L_B} \right) = -\frac{5}{2} \log \left(1 + \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_B^4}{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log \left(1 + \left(\frac{12000}{5000} \right)^4 \right) \Rightarrow \Delta mag_2 = 0,03$$

18) A distância inicial (d_0) de Aldebaran a Terra é:

$$m_{V\alpha} - M_{V\alpha} = 5 \cdot \log d_0 - 5 \Rightarrow 0,85 + 0,63 = 5 \log d_0 - 5 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow d_0 = 19,77 \text{ pc}$$

A distância final (d) de Aldebaran à Terra quando deixar de ser visível será:

$$m'_{V\alpha} - M_{V\alpha} = 5 \log d - 5 \Rightarrow 6 + 0,63 = 5 \log d - 5 \Rightarrow d = 211,836 \text{ pc}$$

A velocidade de afastamento Doppler de Aldebaran é dada por:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow v = c \cdot \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \Rightarrow v = 54,09 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Portanto:

$$v = \frac{\Delta d}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta d}{v} = \frac{d - d_0}{v} \Rightarrow \Delta t = \frac{(211,836 - 19,77)}{54,06} \cdot 3,086 \cdot 10^{13} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \Delta t = 1,095 \cdot 10^{14} \text{ s} \text{ ou } 3,47 \cdot 10^6 \text{ anos}$$

19) a) A partir da Lei de Wien, temos:

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = 2,89 \cdot 10^{-3} \Rightarrow \lambda_{\text{máx}} \cdot 42000 = 2,89 \cdot 10^{-3} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda_{\text{máx}} = 6,88 \cdot 10^{-8} \text{ m} = 68,8 \text{ nm} \text{ (ultravioleta)}$$

b) A fração da energia irradiada pode ser expressa através da comparação das luminosidades de Naos na região visível (L_V) e a total ou bolométrica (L_B). Portanto, temos:

$$M_V - M_B = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_V}{L_B}\right) \Rightarrow C.B. = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_V}{L_B}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4,04 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_V}{L_B}\right) \Rightarrow L_V = 0,024.L_B \Rightarrow L_V = 2,4\%L_B$$

20) A magnitude bolométrica (M_B) de Minelava é:

$$C.B. = M_V - M_B \Rightarrow 1,68 = -0,58 - M_B \Rightarrow M_B = -2,26$$

Já a sua luminosidade bolométrica (L) será dada por:

$$M_B - M_{Sol} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow -2,26 - 4,74 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{L}{L_{Sol}} = 631 \Rightarrow L = 2,20.10^{29}W$$

O raio (R) de Minelava é:

$$L = 4\pi.R^2.\sigma.T^4 \Rightarrow 2,20.10^{29} = 4\pi.R^2.5,67.10^{-8}.3720^4 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R = 4,02.10^{10}m \text{ ou } 57,7R_{Sol}$$

Portanto, sua densidade (ρ) será:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{2M_{sol}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \Rightarrow \rho = \frac{2}{57,7^3} \cdot \frac{M_{sol}}{\frac{4}{3}\pi R_{Sol}^3} \Rightarrow \rho = 1,04.10^{-5} \cdot \rho_{Sol}$$

21)a) Nesta configuração, as estrelas possuem velocidades perpendiculares à direção da Terra. Portanto, neste

instante, não há afastamento ou aproximação com a Terra para detectarmos o efeito Doppler.

b) Para a estrela A, temos:

$$\frac{\Delta\lambda_A}{\lambda_{0A}} = \frac{v_A}{c} \Rightarrow \frac{(6,5 - 6,58) \cdot 10^{-7}}{6,58 \cdot 10^{-7}} = \frac{v_A}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_A = -3,647 \cdot 10^6 \text{ m/s (aproximação)}$$

Analogamente, para a estrela B:

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_{0B}} = \frac{v_B}{c} \Rightarrow \frac{(6,76 - 6,58) \cdot 10^{-7}}{6,58 \cdot 10^{-7}} = \frac{v_B}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow \\ \Rightarrow v_B = 8,206 \cdot 10^6 \text{ m/s (afastamento)}$$

22) Da equação do efeito Doppler relativístico ($z > 0,1$), vem:

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \Rightarrow (z+1)^2 = \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \Rightarrow \\ \Rightarrow v = \frac{(0,13+1)^2 - 1}{(0,13+1)^2 + 1} \cdot c \Rightarrow v = 0,12c$$

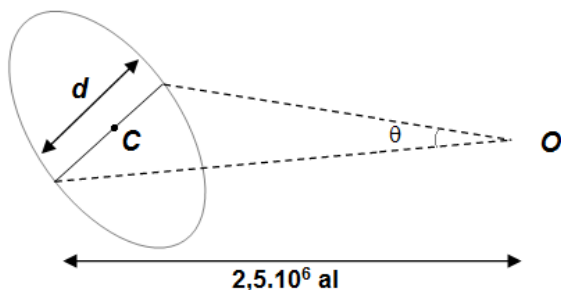
Da Lei de Hubble, temos:

$$v = H_0 \cdot d \Rightarrow 0,12 \cdot 3 \cdot 10^5 = 67,8 \cdot d \Rightarrow d = 531 \text{ Mpc}$$

Como $1 \text{ pc} = 3,26 \text{ al}$, conclui-se que:

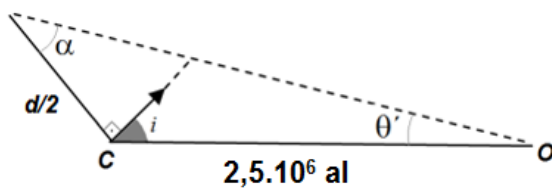
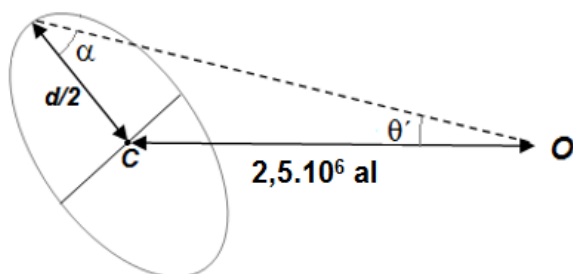
$$d = 531 \cdot 10^6 \cdot 3,26 = 1,73 \cdot 10^9 \text{ al} \text{ ou } 1,73 \cdot 10^9 \text{ anos}$$

23) a) Sendo d o diâmetro da galáxia, analisando a figura, temos:



$$\operatorname{tg} \theta = \frac{d}{2,5 \cdot 10^6} \Rightarrow d = 2,5 \cdot 10^6 \cdot \operatorname{tg} 3,2^\circ \Rightarrow d = 1,396 \cdot 10^5 \text{ al}$$

b) Aplicando a lei dos senos, vem:



$$\frac{2,5 \cdot 10^6}{\text{sen} \alpha} = \frac{6,99 \cdot 10^4}{\text{sen} 0,5^\circ} \Rightarrow \alpha = 18,18^\circ$$

Portanto:

$$\alpha + \theta' + i = 90^\circ \Rightarrow i = 71,32^\circ$$

c) A velocidade de recessão desta galáxia é:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{6556,22 - 6562,80}{6562,80} = \frac{v}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow v = -300,79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Já o módulo do parâmetro z :

$$|z| = \frac{v}{c} \Rightarrow |z| = 10^{-3}$$

d) A magnitude absoluta (M) da galáxia é:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 4,36 - M = 5 \log \left(\frac{2,5 \cdot 10^6}{3,26} \right) - 5 \Rightarrow \\ \Rightarrow M = -20,06$$

e) A magnitude limite deste telescópio é:

$$m_{\text{lim}} = 7,1 + 5 \log d \Rightarrow m_{\text{lim}} = 13,63$$

Portanto, como $m < m_{\text{lim}}$, será possível observar a galáxia com este telescópio.

24) Sendo D_{T-L} a distância Terra - Lua, o diâmetro aparente (θ) da cratera visto da Terra é:

$$\theta = \frac{d}{D_{T-L}} = \frac{80\text{km}}{384400\text{km}} \Rightarrow \theta = 2,08 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Já a menor separação angular resolvível (resolução angular) do olho humano é:

$$\theta_{\text{hum}} = 1,22 \frac{\lambda}{D_{\text{pupila}}} = 1,22 \frac{500 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow \theta_{\text{hum}} = 1,22 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$$

Como $\theta > \theta_{\text{hum}}$, é possível observar a cratera a olho nu da superfície da Terra.

25) Sendo d_{BN} o diâmetro do buraco negro, de massa $M = 4 \cdot 10^6 M_{\text{Sol}}$, que está a uma distância D_{T-BN} da Terra, temos que o diâmetro angular (θ) do buraco negro da perspectiva da Terra será:

$$\left| \begin{array}{l} \theta = \frac{d_{BN}}{D_{T-BN}} \\ d_{BN} = 2R_{Sch} \\ R_{Sch} = 3 \cdot \left(\frac{M}{M_{\text{Sol}}} \right) \end{array} \right. \Rightarrow \theta = \frac{2R_{Sch}}{D_{T-BN}} = \frac{2}{D_{T-BN}} \cdot 3 \cdot \left(\frac{4 \cdot 10^6 M_{\text{Sol}}}{M_{\text{Sol}}} \right) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \theta = \frac{6 \cdot 4 \cdot 10^6}{8,5 \cdot 10^3 \cdot 3,086 \cdot 10^{13}} \Rightarrow \theta = 9,149 \cdot 10^{-11} \text{ rad}$$

Considerando um telescópio cujo diâmetro é igual ao diâmetro terrestre ($D = 2R_T$), o comprimento de onda necessário para distinguir o horizonte de eventos deve ser menor ou igual a:

$$\theta \geq 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \theta \geq 1,22 \cdot \frac{\lambda}{2R_T} \Rightarrow \lambda \leq \frac{2R_T \cdot \theta}{1,22} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \lambda \leq \frac{2.6370 \cdot 10^3 \cdot 9,149 \cdot 10^{-11}}{1,22} \Rightarrow \boxed{\lambda \leq 9,55 \cdot 10^{-4} \text{ m ou } \lambda \leq 0,955 \text{ mm}}$$

26) a) Considerando que $1 \text{ pc} = 206265 \text{ UA}$, temos:

$$\text{tg } \alpha = \frac{10}{25 \cdot 206265} \Rightarrow \alpha = 1,94 \cdot 10^{-6} \text{ rad ou } 0,4''$$

Observação: Para ângulos pequenos $\text{tg } \alpha \approx \alpha$. Pela definição de parsec (pc), se dividirmos uma distância em UA por outra em pc, encontraremos o ângulo em segundo de arco. Logo:

$$\alpha = \frac{10 \text{ UA}}{25 \text{ pc}} \Rightarrow \boxed{\alpha = 0,4''}$$

b) Para ângulos pequenos $\text{sen } \theta \approx \theta$, portanto:

$$\text{sen } \theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \theta = 1,22 \frac{1,6 \cdot 10^{-6}}{8,1} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{\theta = 2,41 \cdot 10^{-7} \text{ rad ou } 0,05''}$$

Sim, o anel é observável, pois $\alpha > \theta$.

Gabaritos

Astronomia

- 1) A 2) B 3) 7h18min 4) $22^{\circ} 22' 9,8''$ N 5) $41^{\circ} 43'$ N
- 6) $\delta = 46^{\circ} 35'$; $\alpha = 15\text{h}15\text{min}10\text{s}$ 7) a) 0° b) 35°
- 8) $\delta_A = 15^{\circ} 45'$; $\alpha_A = 7\text{h}35\text{min}$ e $\delta_B = 84^{\circ} 15'$; $\alpha_B = 19\text{h}35\text{min}$
- 9) $24^{\circ} 02'$ N 10) $\varphi = 80^{\circ} 0' 10''$ S ; $\delta = -69^{\circ} 39' 40''$
- 11) 4h31min40s 12) a) 0° b) $23^{\circ} 27'$ c) 0° d) $53^{\circ} 7' 48,4''$ e) 6h
- f) 6h g) $13^{\circ} 25' 12''$ S 13) a) Peacock, Rigel e Achernar.
b) Alderamin e Polaris. c) Peacock e Achernar.
d) Algeiba e Arcturus. e) Arcturus .
- 14) Não é possível uma situação na Cracóvia que Sirius não nasça e canopos nasça e se ponha.
- 15) a) $-23^{\circ} 27' \leq \delta < 0^{\circ}$ b) $-23^{\circ} 27' \leq \delta < -22^{\circ} 54'$ 16) B
- 17) 1,52 UA 18) 12364 km 19) 4,25 h 20) 62' 21) $51^{\circ} 39'$
- 22) Quarto crescente; 0 h e horizonte ocidental.
- 23) $12\text{h}18\text{min} < \Delta t < 12\text{h}30\text{min}$ 24) $x = 0,60\text{m}$; $h = 2,67\text{ m}$
- 25) $\varphi = 80^{\circ}$; $\delta = 20^{\circ}$ 26) a) $h = 0^{\circ}$; $A = 270^{\circ}$ b) 2,045 dias

Astrofísica

1) **a)** $5,8 \cdot 10^9 \text{ J}$ **b)** 0,19 **c)** $v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$; $\sqrt{3}$

2) **a)** Órbita elíptica. **b)** Órbita hiperbólica. **3)** $\sqrt{\frac{3GM}{R}}$

4) Ver resolução. **5) a)** $\Delta a = 97,93 \text{ m}$ **b)** $v_s = 7683,982 \text{ m/s}$;

$v_a = 7683,927 \text{ m/s}$ **c)** 0,538m; o astronauta irá conseguir realizar a ancoragem.

6) $3 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ **7) a)** $a = 1,25 \text{ UA}$; $e = 0,2$

b) 2,85 km/s **c)** 0,7 ano **d)** $42,8^\circ$ **8)** $x = \frac{R^2 \cdot v_0^2}{2GM - v_0^2 \cdot R}$

9) $35,26^\circ$ **10) a)** $5 \cdot 10^4 \text{ kg}$ **b)** $-1 \cdot 10^{12} \text{ J}$ **c)** Ver resolução.

11) a) 11 **b)** 4 Endor **c)** 27 Taris-ano **d)** 8 Taris-comprimento

e) $\lambda = \pi + \frac{2\pi n}{270} - \arctg\left(\frac{\text{sen}\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}{9 - \text{cos}\left(\frac{52\pi n}{270}\right)}\right)$ **f)** 2,56 Taris²

12) $6,38 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$ **13) a)** 1,42 **b)** 22,9 **c)** 1,6 **14) a)** 281,25 pc

b) $3,42 \cdot 10^9 \text{ anos}$ **15)** 1,64 **16)** 8000 fótons **17) a)** ver

resolução. **b)** $\Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{L_{tot}}\right)$; $\Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_B}{L_{tot}}\right)$

c) 3,8; 0,03 **18)** $3,47 \cdot 10^6 \text{ anos}$ **19) a)** 68,8 nm **b)** 2,4%

- 20)** $1,04 \cdot 10^{-5} \rho_{\text{sol}}$ **21) a)** Neste instante não há aproximação ou afastamento em relação a Terra para detectarmos o efeito Doppler. **b)** $v_A = -3,647 \cdot 10^6 \text{ m/s}$; $v_B = 8,206 \cdot 10^6 \text{ m/s}$
- 22)** 531 Mpc; $1,73 \cdot 10^9$ anos **23) a)** $1,396 \cdot 10^5 \text{ al}$ **b)** $71,32^\circ$
- c)** $-300,79 \text{ km/s}$; 10^{-3} **d)** $-20,06$ **e)** Ver resolução.
- 24)** Ver solução. **25)** $\lambda \leq 0,955 \text{ mm}$ **26) a)** $0,4''$ **b)** $0,05''$

Tabelas e Constantes

Alfabeto grego

Maiúscula	Minúscula	Pronúncia
A	α	alfa
B	β	beta
Γ	γ	gama
Δ	δ	delta
E	ϵ	épsilon
Z	ζ	dzeta
H	η	eta
Θ	θ	teta
I	ι	iota
K	κ	capa
Λ	λ	lâmbda
M	μ	mi
N	ν	ni
Ξ	ξ	ksi
O	\omicron	ômicron
Π	π	pi
P	ρ	rô
Σ	σ	sigma
T	τ	tau
Y	υ	ípsilon
Φ	ϕ, φ	fi
X	χ	qui
Ψ	ψ	psi
Ω	ω	ômega

Distâncias

Nome	Símbolo	Valores
Unidade astronômica	UA	1 UA = $1,496 \cdot 10^{11}$ m
Ano-luz	al	1 al = $9,461 \cdot 10^{15}$ m = 63 240 UA
Parsec	pc	1 pc = $3,086 \cdot 10^{16}$ m = 206 264,806 UA = 3,262 al

Constantes matemáticas

Constantes	Valores (\approx)
π	3,141593
E	2,718282
1 rad	57,29578°
1°	0,017453 rad
1''	$4,848 \cdot 10^{-6}$ rad

Constantes físicas

Constantes físicas	Símbolo	Valores
carga elétrica elementar	e	$1,602 \cdot 10^{-16}$ C
massa de repouso do elétron	-	$9,109 \cdot 10^{-31}$ kg
massa de repouso do próton	-	$1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
massa de repouso do nêutron	-	$1,675 \cdot 10^{-27}$ kg
constante de Avogadro	N_A	$6,022 \cdot 10^{23}$ mol ⁻¹
constante de Planck	h	$6,626 \cdot 10^{-34}$ J.s

Exercícios de Astronomia e Astrofísica para olimpíadas culturais

Constantes físicas	Símbolo	Valores
constante dos gases	R	8,314 J/(K.mol)
constante da gravitação universal	G	$6,673 \cdot 10^{-11}$ N.m ² /kg ²
velocidade da luz no vácuo	c	$2,998 \cdot 10^8$ m/s
constante de Stefan - Boltzmann	σ	$5,670 \cdot 10^{-8}$ W/(m ² .K ⁴)
constante de Boltzmann	k _B	$1,381 \cdot 10^{-23}$ J/K
constante de Wien	$\lambda_{\text{máx.}} \cdot T$	$2,898 \cdot 10^{-3}$ m.K
constante de Hubble	H ₀	$67,80 \pm 0,77$ km/(s.Mpc)
unidade de massa atômica	u.m.a	1 u.m.a. = $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg

Dados do Sol (☉)

Propriedades	Valores
Massa	$1,989 \cdot 10^{30}$ kg
Raio	$6,955 \cdot 10^8$ m
Temperatura efetiva	5780 K
Luminosidade	$3,96 \cdot 10^{26}$ W
Magnitude visual aparente na banda V	-26,78
Magnitude visual absoluta na banda V	4,75
Magnitude bolométrica absoluta	4,72
Inclinação do equador com a eclíptica	7°15′
Diâmetro angular aparente	30′
Distância ao centro da galáxia	8,5 kpc

Dados da Terra (⊕)

Propriedades	Valores
Massa	$5,974 \cdot 10^{24}$ kg
Raio polar	$6,357 \cdot 10^6$ m
Raio equatorial	$6,378 \cdot 10^6$ m
Raio da esfera de mesmo volume	$6,371 \cdot 10^6$ m
Perímetro aproximado da linha do equador	40 000 km
Volume	$1,087 \cdot 10^{21}$ m ³
Densidade média	$5,52$ g/cm ³
Constante solar	1366 W/m ²
Velocidade orbital média	$29,783$ km/s
Distância média ao Sol	$1,49 \cdot 10^{11}$ m
Aceleração da gravidade ao nível do mar a 45° de latitude	$9,807$ m/s ²

Dados da Lua

Propriedades	Valores
Massa	$7,349 \cdot 10^{22}$ kg
Raio médio	$1,737 \cdot 10^6$ m
Distância média Terra - Lua	$3,844 \cdot 10^8$ m
Densidade média	$3,36$ g/cm ³
Aceleração da gravidade na superfície	$1,62$ m/s ²
Temperatura	de -170°C a 120°C
Distância média a Terra	$3,78 \cdot 10^8$ m