OLAA virtual 2020
PRUEBA TEÓRICA GRUPAL
22 de noviembre de 2020

SOLUCIONES

PREGUNTA 1

La relación entre la densidad del exoplaneta y su estrella es,

$$\frac{\rho_{Eyeque}}{\rho_{Nenque}} = \frac{M_E/V_E}{M_N/V_N} = \frac{M_E}{M_N}\frac{V_N}{V_E} = \frac{M_E}{M_N}\frac{4/3\pi R_N^3}{4/3\pi R_E^3} = \frac{M_E}{M_N}\left(\frac{R_N}{R_E}\right)^3 \qquad \text{(Ec. 1)}$$

Donde M_N y R_N son la masa y el radio de Nenque, y M_E y R_E, la masa y el radio de Eyeque.

Por la ley de gravitación universal, la aceleración gravitatoria en la superficie de Eyeque es,

$$g_{Eyeque} = \frac{GM_E}{R_E^2}$$

De donde se puede determinar la masa de Eyeque:

$$M_E = \frac{R_E^2 \cdot g_{Eyeque}}{G} \qquad \text{(Ec. 2)}$$

El radio de Nenque se puede expresar mediante el radio aparente en términos de la distancia (r) entre Nenque y Eyeque:

$$R_N = r \cdot s_{Nenque} \qquad \text{(Ec. 3)}$$

donde s_{Nenque}, es el radio aparente expresado en radianes: $s_{Nenque} = 1,9^o \cdot \pi/180 = 0,0332$ rad

Como la órbita de Eyeque se está considerando circular y la masa de Eyeque es mucho menor que la masa de Nenque, entonces aplicando gravitacional universal y la segunda ley de Newton, se puede obtener la masa de Nenque en función del período orbital (P) de Nenque y de la distancia (r) entre Eyeque y Nenque,

$$\frac{GM_E M_N}{r^2} = M_E\left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 r$$

de donde,

$$M_N = \frac{4\pi^2 r^3}{GP^2} \qquad \text{(Ec. 4)}$$

Sustituyendo las ecuaciones 2, 3 y 4 en la ecuación 1, se obtiene,

$$\frac{\rho_{Eyeque}}{\rho_{Nenque}} = \frac{M_E}{M_N}\left(\frac{R_N}{R_E}\right)^3 = \frac{\left(\frac{R_E^2 \cdot g_{Eyeque}}{G}\right)}{\left(\frac{4\pi^2 r^3}{GP^2}\right)}\left(\frac{r \cdot s_{Nenque}}{R_E}\right)^3 = \frac{g_{Eyeque} \cdot P^2 \cdot s_{Nenque}^3}{4\pi^2 R_E}$$

$$\frac{\rho_{Eyeque}}{\rho_{Nenque}} = \frac{1{,}9 \cdot 9{,}81 \cdot (22 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot (1{,}9 \cdot \pi/180)^3}{4\pi^2 \cdot 50{,}53 \times 10^6} = 1{,}23$$

Es decir que el exoplaneta Eyeque es 1,23 veces más denso que su estrella Nenque.

PREGUNTA 2

Parte a

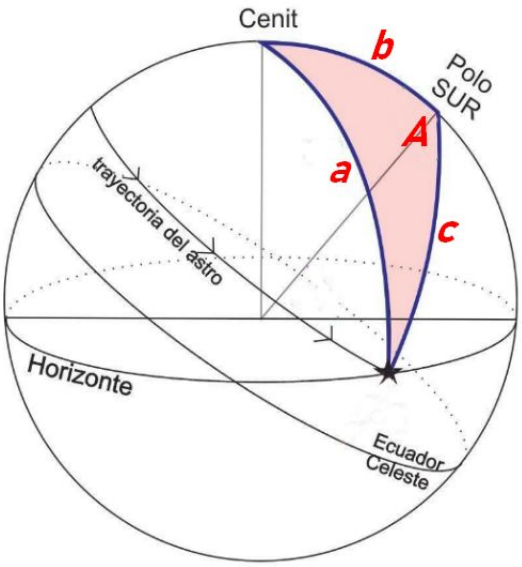
La altura h_S del polo sur es $h_S = |\alpha|$, y como la latitud es negativa, entonces, $h_S = -\alpha$.
Para que una estrella sur sea circumpolar su altura mínima (cuando pasa por el antimeridiano) debe ser positiva, es decir, $h_S - (90^o - |\delta|) > 0$, y como la declinación es negativa, entonces se debe cumplir que, $-\alpha - 90^o - \delta > 0$, o lo que es lo mismo,

$\alpha + \delta + 90^o < 0$

Parte b

Para determinar el ángulo horario H, de salida o puesta de una astro, es suficiente con identificar los siguientes ángulo en el triángulo esférico,

$a = 90º$
$b = 90º + \alpha$
$c = 90º + \delta$
$A = H$



Y luego aplicar la ecuación del coseno y algunas propiedades básicas de las funciones trigonométricas:

$cos(a) = cos(b)cos(c) + sen(b)sen(c)cos(A)$

$cos(90º) = cos(90º + \alpha)cos(90º + \delta) + sen(90º + \alpha)sen(90º + \delta)cos(H)$

$0 = sen(\alpha)sen(\delta) + cos(\alpha)cos(\delta)cos(H)$

$sen(\alpha)sen(\delta) = -cos(\alpha)cos(\delta)cos(H)$

De donde finalmente se obtiene la ecuación para el ángulo horario de salida o puesta de un astro,

$tg(\alpha)tg(\delta) = -cos(H)$

Parte c

Siendo $\alpha = -30º$ y $\delta = -45º$, se cumple que, $cos(H) = -tg(-30º)tg(-45º)$, que tiene dos soluciones que corresponden al ángulo horario de la salida y de la puesta del astro,

$H_S = -125,3º$ y $H_P = 125,3º$

Finalmente el tiempo que permanece por encima del horizonte es,

$$T = \frac{H_P - H_S}{15º} = 16,7\ horas$$

PREGUNTA 3

Por gravitación universal y Newton, se pueden determinar los radios de las órbitas circulares de A y B a partir de sus períodos:

$$r_A = \sqrt[3]{\frac{GM_T P_A^2}{4\pi^2}} \text{ y } r_C = \sqrt[3]{\frac{GM_T P_C^2}{4\pi^2}}$$

De donde, $r_A = 8,056 \times 10^6 m$, y $r_C = 6,650 \times 10^6 m$

La maniobra de transferencia Hohmann corresponde a media órbita elíptica en la que el perigeo corresponde al punto en el que se encuentra C cuando comienza la maniobra y el apogeo corresponde al punto en el que se encuentra A cuando termina la maniobra.

La órbita de transferencia entonces es una elipse que tiene cuyo semieje mayor es,

$$a_H = \frac{r_A + r_C}{2}, \; a_H = 7,353 \times 10^6 m$$

Las velocidades se pueden determinar por energía.
La velocidad de C justo antes de la transferencia en t_0 es,

$$v_{C0-} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_C}}$$

La velocidad de C justo después de la transferencia en t_0 es,

$$v_{C0+} = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{r_C} - \frac{1}{a_H}\right)}$$

Entonces el cambio de velocidad en el momento de iniciar la transferencia es,

$$\Delta v_0 = v_{C0+} - v_{C0-} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_C}}\left(\sqrt{2 - \frac{r_C}{a_H}} - 1\right)$$

$$\Delta v_0 = 361,5 \; m/s$$

De modo similar, la velocidad de C justo antes de terminar la transferencia en t_1 es,

$$v_{C1-} = \sqrt{GM_T\left(\frac{2}{r_A} - \frac{1}{a_H}\right)}$$

Y la velocidad de C justo después de terminar la transferencia en t_1 es,

$$v_{C1+} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_A}}$$

Entonces el cambio de velocidad en el momento de finalizar la transferencia es,

$$\Delta v_1 = v_{C1+} - v_{C1-} = \sqrt{\frac{GM_T}{r_A}}\left(1 - \sqrt{2 - \frac{r_A}{a_H}}\right)$$

$$\Delta v_1 = 344,5\ m/s$$

El período de la órbita de transferencia, P_H , se obtiene aplicando nuevamente gravitación y Newton,

$$P_H = \sqrt{\frac{4\pi^2 a_H^3}{GM_T}}\ ,\ P_H = 6278\ s$$

Si medimos los ángulos de las naves en sentido antihorario con respecto a la posición inicial de A, entonces el ángulo de A en función del tiempo es, $\theta_A = \omega_A t = \frac{2\pi}{T_A} t$

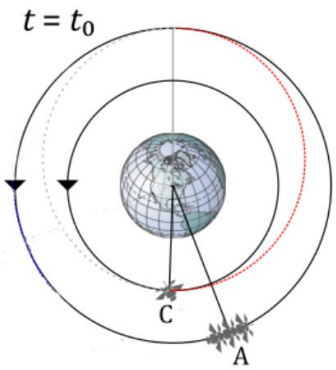
Y el ángulo de C (hasta t_0), es, $\theta_C = \omega_C t = \frac{2\pi}{T_C} t - \frac{\pi}{2}$

El tiempo en que las naves se encuentran es $t_1 = t_0 + \frac{T_H}{2}$, y en ese instante las posiciones de ambas naves son idénticas, es decir

$$\frac{2\pi}{T_A}\left(t_0 + \frac{T_H}{2}\right) = \frac{2\pi}{T_C} t_0 - \frac{\pi}{2} + \pi$$

De donde se obtiene el tiempo $t_0 = 4017\ s$, y entonces $t_1 = 7156\ s$.

Entonces las posiciones de las naves en t_0 serán, $\theta_A(t_0) = 200,9º$, y $\theta_C(t_0) = 177,8º$, que corresponden a la siguiente configuración (donde el impulso de C es tangencial a la trayectoria):



PREGUNTA 4

Parte a

La magnitud absoluta (M) de la estrella se puede determinar a partir de su magnitud aparente (m) y su distancia en parsec (d),

$$M = m + 5 - 5log\,(d)$$

$$M = 0,42 + 5 - 5log\,(160/3,26) = \ -3,03$$

La luminosidad de la estrella (L), en términos de la luminosidad del Sol (L_S), se relaciona con las magnitudes respectivas M y M_S ,

$$L = L_S\ 10^{\left(\frac{M-M_S}{-2,5}\right)} = L_S\ 10^{\left(\frac{-3,03-4,8}{-2,5}\right)} = 1361\ L_S$$

Parte b

La relación masa-luminosidad para una estrella de la secuencia principal es,

$$\frac{L}{L_S} = \left(\frac{Masa}{Masa_S}\right)^{3,5}$$

Entonces la masa de la estrella en términos de la masa del Sol es,

$$Masa = \sqrt[3,5]{1361}\ Masa_S = 7,86\ Masa_S$$

Parte c

Por la fórmula de Ballesteros se puede determinar la temperatura de la estrella,

$$T\ = 4600\ K\ \left(\frac{1}{0,92(-0,09)+1,7} + \frac{1}{0,92(-0,09)+0,62}\right)$$

$$T = 11407\ K$$

Por Stefan-Boltzmann, la luminosidad de una estrella es, $L = \sigma 4\pi R^2 T^4$, entonces al hacer el cociente entre la luminosidad de la estrella y la luminosidad del Sol, se obtiene el radio de la estrella en términos del radio del Sol,

$$\frac{L}{L_S} = \frac{R^2 T^4}{R_S^2 T_S^4}$$

$$R = R_S \sqrt{\frac{L}{L_S}} \left(\frac{T_S}{T} \right)^2 = R_S \sqrt{1361} \left(\frac{5800}{11407} \right)^2 = 9,54\ R_S$$

Parte d

Por gravitación y por Newton, se cumple que el radio orbital del exoplaneta (r) expresado en u.a. y su período (P) expresado en años, están relacionado con la masa de la estrella en términos de la masa del Sol, de acuerdo con la conocida expresión,

$$\frac{r^3}{P^2} = \frac{Masa}{Masa_S}$$

de donde se obtiene la distancia del exoplaneta a su estrella,

$$r = \sqrt[3]{P^2 \frac{Masa}{Masa_S}}$$

$r = \sqrt[3]{(100/365)^2 \cdot 7,86} = 0,839\ u.a.$

La temperatura (T_P) de equilibrio del exoplaneta se obtiene igualando la energía que emite al espacio, con la energía que recibe de la estrella,

$$\sigma 4\pi R_P^2 T_P^4 = \frac{\pi R_P^2}{4\pi r^2}\ \sigma 4\pi R^2 T^4$$

$$T_P = T \sqrt{\frac{R}{2r}}$$

$$T_P = 11407 \sqrt{\frac{9,54 \cdot 7,0 \times 10^8}{2 \cdot 0,839 \cdot 1,5 \times 10^{11}}}$$

$T_P = 1858\ K$