

Olimpíada Latino-Americana de  
Astronomia e Astronáutica  
Provas Teóricas e Resoluções  
(2009 a 2019)

Thiago Paulin Caraviello (org.)  
Fellipy Dias Silva  
Julio Cesar Klafke

**Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)  
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)**

Caraviello, Thiago Paulin  
Olimpiada Latino-Americana de Astronomia e  
Astronáutica [livro eletrônico] : provas teóricas e  
resoluções (2009 a 2019) / Thiago Paulin Caraviello,  
Fellipy Dias Silva, Julio Cesar Klafke ; Thiago  
Paulin Caraviello (org.). -- São Paulo : Ed. dos  
Autores, 2020.

PDF

ISBN 978-65-00-07615-8

1. Astronomia (Ensino médio) 2. Astronáutica  
(Ensino médio) 3. Olimpiada Latino-americana de  
Astronomia e Astronáutica (OLAA) I. Silva, Fellipy  
Dias. II. Klafke, Julio Cesar. III. Título.

20-42165

CDD-520.7

**Índices para catálogo sistemático:**

1. Astronomia : Ensino médio 520.7

Cibele Maria Dias - Bibliotecária - CRB-8/9427

# Prefácio

A presente coletânea de provas e respectivas resoluções, utilizadas nas onze primeiras edições da Olimpíada Latino-Americana de Astronomia e Astronáutica, OLAA, é, de certa forma, a concretização de uma ideia que nasceu em 2008, tomou forma em 2009, no Ano Internacional da Astronomia e que está prosperando.

A ideia de uma Olimpíada Pan-Americana de Astronomia e Astronáutica, OPA, foi lançada durante a realização dos “Campamentos Espaciales, Ecuador 2008”, que aconteceu nas cidades de Quito e Ibarra, entre os dias 18 e 24 de maio de 2008, pela coordenadora do Programa AEB Escola, Ivette Maria Rodrigues Soares, membro da Comissão Organizadora da Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica, OBA. A proposta foi elogiada pelos representantes da Argentina, Chile, Colômbia, Equador, México Paraguai, Peru e Uruguai e a ideia seria colocá-la em prática a partir de 2009, em comemoração ao Ano Internacional da Astronomia.

O “Campamentos Espaciales, Ecuador 2008” fez parte de um plano de ação para área de educação, definido durante a V Conferência das Américas, realizada em 2006, com intuito de investir em iniciativas de incentivo à educação espacial nos países da América Latina e Central.

Para dar continuidade à ideia de se fundar a OPA, houve uma reunião no Brasil entre João Batista Garcia Canalle (Brasil), Júlio Daniel Blanco Zárata (Uruguai) e Christian Emílio Schaerer Serra (Paraguai) na qual se discutiu a proposta da criação da OPA.

Aproveitando-se da reunião anual da Sociedade Astronômica do Uruguai, em 11 de outubro de 2008, Tabaré Gallardo e Reina Pintos da Sociedade Uruguia de Astronomia, em comum acordo com o que se discutiu na reunião do Brasil, acima mencionada, convidou representantes de diversos países da América do Sul e Central para participarem no dia 10 de outubro de 2008, de uma reunião de Fundação do que viria a ser chamada de Olimpíada Latino-Americana de Astronomia e Astronáutica. Infelizmente a Ivette Maria Rodrigues Soares não teve o apoio da Agência Espacial Brasileira para participar desta reunião de Fundação da OLAA, por isso fui em seu lugar.

Fundaram a OLAA: João Batista Garcia Canalle (Brasil), Olga Victoria Hernández de la Fuente (Chile), Jorge Ernesto Guevara Burgos (Colômbia), Christian Emilio Schaerer Serra (Paraguai) e Júlio Daniel Blanco Zárata (Uruguai). A OLAA foi realizada no Brasil em 2009, Ano Internacional da Astronomia, como foi planejado. Participaram apenas sete países: Bolívia, Brasil, Chile, Colômbia, México, Paraguai e Uruguai. Alguns deles tiveram que iniciar neste ano suas Olimpíadas Nacionais, condição necessária para participar da OLAA. Em 2019 participaram quase o dobro de países. O sonho foi transformado em realidade e se expandiu, graças à dedicação de muitos.

As perguntas deste livro foram elaboradas por professores, engenheiros aeroespaciais, astrônomos e físicos dos países que já sediaram a OLAA. Cabe aos autores o mérito de ter conseguido recuperar todas as provas já realizadas pela OLAA e resolver todas as questões, com excelente clareza e didática. Estou certo de que esta obra será de extrema valia para os milhares de alunos do Brasil que concorrem, anualmente, para fazerem parte da equipe brasileira junto à OLAA e especialmente às equipes que representam o Brasil nas OLAAs. Resta-me cumprimentar os autores pelo excelente trabalho e agradecer, em nome dos muitos alunos que dele farão uso.



*João Batista Garcia Canalle assinando a ata de fundação da OLAA. Faculdade de Ciências Montevideo, Uruguay.*

**João Batista Garcia Canalle**

*“Dedico a todos que contribuíram de alguma forma  
com a realização das edições da OLAA.”*

# Índice

<b>Introdução</b>	<b>6</b>
<b>Provas Teóricas</b>	
I OLAA – 2009 – Brasil .....	7
II OLAA – 2010 – Colômbia .....	13
III OLAA – 2011 – Brasil .....	17
IV OLAA – 2012 – Colômbia .....	23
V OLAA – 2013 – Bolívia .....	27
VI OLAA – 2014 – Uruguai .....	31
VII OLAA – 2015 – Brasil .....	37
VIII OLAA – 2016 – Argentina.....	44
IX OLAA – 2017 – Chile .....	51
X OLAA – 2018 – Paraguai .....	58
XI OLAA – 2019 – México .....	61
<b>Resoluções</b>	
I OLAA – 2009 – Brasil .....	69
II OLAA – 2010 – Colômbia .....	74
III OLAA – 2011 – Brasil .....	84
IV OLAA – 2012 – Colômbia .....	90
V OLAA – 2013 – Bolívia .....	96
VI OLAA – 2014 – Uruguai .....	102
VII OLAA – 2015 – Brasil .....	109
VIII OLAA – 2016 – Argentina.....	115
IX OLAA – 2017 – Chile .....	123
X OLAA – 2018 – Paraguai .....	129
XI OLAA – 2019 – México .....	137
<b>Referências e Temário</b>	<b>150</b>

## Introdução

A Olimpíada Latino-Americana de Astronomia e Astronáutica (OLAA) é uma competição anual de Astronomia e Astronáutica para estudantes do ensino médio. Fundada em 11 de outubro de 2008, em Montevideu, Uruguai. Seus principais objetivos são compartilhar conhecimentos, gerar vínculos de comunicação e colaboração, fomentar a difusão e o aperfeiçoamento docente, assim como gerar vocações pela Astronomia, Astronáutica e Ciências afins. Sua primeira edição ocorreu no Ano Internacional da Astronomia, em 2009, no Rio de Janeiro, Brasil, com a participação de 7 países.

As provas da OLAA consistem em exames teóricos versando sobre Astronomia e Astronáutica, e provas práticas que podem incluir manipulação de telescópios, sessões de planetário, uso de cartas celestes, construção de foguetes de garrafas PET etc.

A competição ocorre anualmente no mês de setembro ou outubro e dura uma semana. Cada país pode levar uma equipe de até 5 participantes, necessariamente mista (com alunos dos dois gêneros), acompanhada por dois professores (líderes de equipe) e observadores. Além das provas individuais, ocorrem provas em equipe, com cada grupo composto de 3 ou 4 alunos de países diferentes.

São distribuídas medalhas de ouro, prata e bronze e menções honrosas aos alunos de acordo com o desempenho nas provas, além de prêmios individuais para melhor prova teórica, observacional, em grupo e de foguetes. (Fonte: Wikipédia)



**I Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
12 a 19 de outubro de 2009 – Rio de Janeiro – Brasil



**Prova Teórica Individual**

**1)** Manágua, capital da Nicarágua, encontra-se a  $12^\circ$  de latitude Norte e  $86^\circ$  de longitude Oeste, enquanto que Montevidéu acha-se a  $35^\circ$  de latitude Sul e  $56^\circ$  de longitude Oeste. Um observador situado na cidade de Montevidéu observa uma estrela às 20h no zênite.

- Qual será a hora para o observador de Montevidéu quando o observador de Manágua estiver observando a culminação superior da estrela?
- Qual a altura na qual o observador de Manágua vê a estrela culminar superiormente?

**2)** É Lua Cheia e é passada uma hora de um equinócio. A Lua se encontra na constelação da Virgem.

- Qual estação acaba de entrar o hemisfério Sul da Terra?
- Qual o momento do dia nasceu a Lua nesta data?

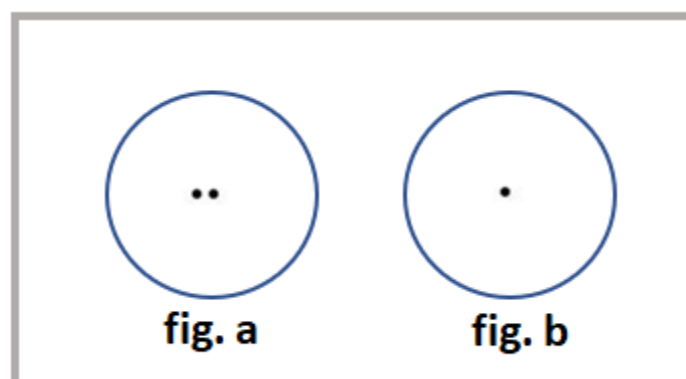
**3)** Johannes Kepler (1571-1630) foi um matemático, astrólogo e astrônomo alemão cuja principal contribuição à Astronomia foram as três leis do movimento planetário. Kepler estudou as observações do lendário astrônomo Tycho Brahe e descobriu, por volta de 1605, que estas observações seguiam três leis matemáticas relativamente simples. Suas três leis do movimento planetário desafiavam a Astronomia e Física de Aristóteles e Ptolomeu. As Leis de Kepler constituíram um grande avanço na Astronomia.

- Determine o período de revolução que teria um planeta se ele distasse do Sol o dobro da distância que a Terra dista do Sol.
- A que distância do Sol, em ua, deveria estar um planeta para que o período de revolução durasse dois anos?

**4)** A cada seis anos, aproximadamente, a Terra atravessa o plano médio das órbitas dos satélites galileanos, o que acarreta fenômenos mútuos entre os satélites, como ocultações e eclipses. Tais eventos, observados fotometricamente da Terra com alta precisão temporal, fornecem elementos para que se saibam as posições dos satélites com incertezas menores que 100 km.

Suponha que se efetue a fotometria de dois satélites momentos antes de uma ocultação [fig. a] admitindo que seus brilhos e diâmetros aparentes sejam iguais e, além do mais, que se tenha subtraído a contribuição do fundo do céu. A magnitude aparente combinada dos dois satélites observados na situação da [fig. a] é de 5,25.

- Determine a magnitude que seria observada durante um eclipse total de ambos como na [fig. b].
- Qual é a magnitude individual aparente de cada satélite?



5) A classificação espectral de Harvard é um esquema de classificação de estrelas que foi generalizado por volta de 1890 pelos astrônomos da Universidade de Harvard e Yale. Fisicamente, as classes indicam a temperatura da estrela e são normalmente listadas da mais quente para a mais fria, tal como é feito na seguinte tabela.

Classe	Temperatura	Cor	Massa	Raio	Luminosidade	Linhas de absorção
O	28 000 – 50 000°C	Azul	60	15	1 400 000	Nitrogênio, Carbono, Hélio e Oxigênio
B	9 600 – 28 000°C	Branco azulado	18	7	20 000	Hélio, Hidrogênio
A	7 100 – 9 600°C	Branco	3,1	2,1	80	Hidrogênio
F	5 700 – 7 100°C	Branco amarelado	1,7	1,3	6	Metais: Ferro, Titânio, Cálcio, Estrôncio e Magnésio.
G	4 600 – 5 700°C	Amarelo (como o Sol)	1,1	1,1	1,2	Cálcio, Hélio, Hidrogênio e metais
K	3 200 – 4 600°C	Amarelo laranja	0,8	0,9	0,4	Metais e óxido de titânio
M	1 700 – 3 200°C	Vermelho	0,3	0,4	0,04	Metais e óxido de titânio

Considere duas estrelas, uma de tipo K e outra de tipo B, ambas com mesmo tamanho (mesmo raio).

- Qual das duas apareceria com maior magnitude absoluta?
- Qual delas estaria mais longe se as duas apareceram ao olho nu com a mesma magnitude aparente?

6) Como o espaço entre as estrelas não é completamente vazio, a equação de magnitudes deve usar uma correção devida à extinção luminosa causada pela poeira no meio interestelar. A equação corrigida é da forma:

$$m - M = 5 \log \frac{r}{10 \text{ pc}} - \alpha$$

Onde  $\alpha$  é o coeficiente de extinção que no plano galáctico tem um valor aproximado de  $2,0 \cdot 10^{-3}$  mag/pc. Calcule a distância a uma estrela de  $M = 2$  e  $m = 8$  considerando e desconsiderando o coeficiente de extinção. Quando consideramos o coeficiente de extinção a estrela parece mais próxima ou mais longínqua?

7) Em 1920, Edwin Hubble achou que algumas das manchas difusas que se observavam nos telescópios, que todos achavam que eram nuvens dentro da Via Láctea, eram na realidade, outras galáxias. A aplicação do Efeito Doppler permitiu que ele observasse que as galáxias estavam se afastando umas das outras e, além disso, quanto mais longe se achava uma galáxia, mais rápida ela se afastava. Ele concluiu que isto permitia encontrar a distância à qual se achava uma galáxia a partir da famosa equação:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \left( \frac{H}{c} \right) \cdot r$$

Onde o valor de  $H$  é  $\sim 77 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ ,  $r$  é a distância medida em parsec e  $c$  a velocidade da luz. O termo da esquerda é conhecido como *redshift* ( $z$ ) e é determinado pelo deslocamento da linha analisada.

- Para que cor se desloca o espectro de uma galáxia que se afasta do observador?
- Tem-se observado que uma galáxia experimenta um deslocamento para o vermelho de  $z = 0,77$ . Determine a distância a qual se encontra essa galáxia.

## Prova Teórica em Grupo

1) Considere que é meio-dia solar verdadeiro em La Paz (16°32' S, 68°8' W) no primeiro dia de inverno no hemisfério Norte. Consulte, quando necessário, o mapa no final da prova. Considere as seguintes cidades:

- Brasília (15°46' S, 47°55' W)
- Montevidéu (34°53' S, 56°10' W)
- Cidade do México (19°20' N, 98°11' W)
- Santiago (33°26' S, 70°39' W)
- Assunção (25°30' S, 57°27' W)
- Bogotá (4°36' N, 74°08' W)

a) Qual a hora solar verdadeira em cada cidade nesse instante?

b) Qual a hora que os relógios estão marcando?

2) Hoje em dia conhecemos mais de 250 estrelas que possuem planetas<sup>1</sup>. Métodos indiretos, como o método de trânsito, são, de longe, os meios mais eficientes de detectar e caracterizar planetas extrassolares. O método de trânsito pode ser usado para detectar planetas quando a estrela, planeta e o observador estão alinhados. O que fazemos é observar a curva de luz da estrela e, com isso, inferir algumas informações sobre os planetas e suas órbitas.

Assumindo que a órbita do planeta é circular, a geometria do trânsito pode ser descrita de forma simples pela figura 1 ao lado. Onde  $b$  é o parâmetro de impacto (adimensional), isto é, a projeção da menor distância do centro do planeta ao equador da estrela,  $R$  é o raio da estrela,  $a$  é o raio orbital,  $i$  é a inclinação da órbita com relação à nossa linha de visada.

A duração total do trânsito  $d$  é expressa por:

$$d \approx \frac{PR}{\pi a} \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{a}{R} \cos i\right)^2} \quad (1)$$

Onde  $r$  é o raio do planeta e  $P$  é o período orbital. Além disso, a duração da entrada/saída  $t$  pode ser determinada pela fórmula:

$$t \approx d \frac{r}{R} \sqrt{1 - b^2} \quad (2)$$

O planeta em torno da estrela HD 209458 foi um dos primeiros planetas extrassolares detectados pelo método fotométrico. Observações desta estrela, usando um pequeno telescópio de 14", levam à seguinte curva de luz:

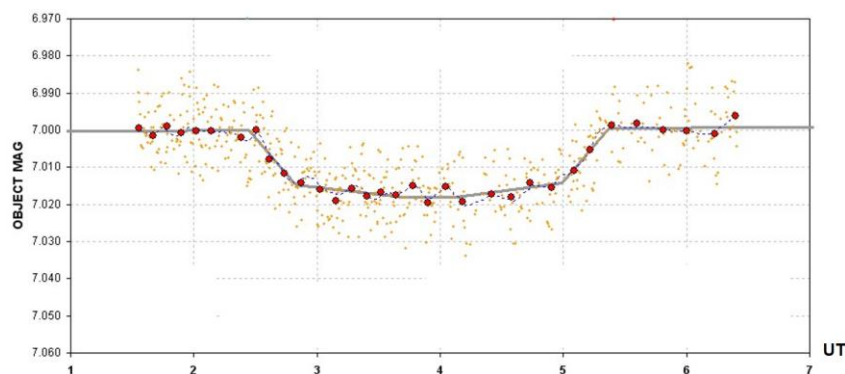


Figura 2. Curva de luz de HD 209458

Os círculos vermelhos são as medianas dos pontos amarelos correspondentes as observações da magnitude da estrela. UT (Universal Time) está medido em horas.

<sup>1</sup> De acordo com os dados atuais, conhecemos mais de 2 500 estrelas que possuem exoplanetas.

A linha sólida na figura representa uma tentativa, à mão, de fazer a curva que compreende a mediana dos dados. Suponha que, usando outro método, tenhamos encontrado o raio e a massa da estrela com valores respectivamente iguais a:  $R = 0,91R_{\odot}$  e  $M = 0,92M_{\odot}$ . Considere que a massa do planeta é muito menor que a massa da estrela. Quando necessário consulte a tabela de constantes. A partir dos dados apresentados:

- Estime a duração total do trânsito.
- Estime o tempo de entrada ou saída.
- Determine a profundidade da curva de luz.
- Qual o valor do raio  $r$  do planeta?
- Qual o valor, em ua, do raio orbital  $a$ ?
- Qual o valor da inclinação  $i$ ?
- Qual o período orbital  $P$  do planeta extrassolar?

3) A tabela a seguir nos apresenta alguns dados de um sistema planetário hipotético, onde a massa dos planetas é dada em massas terrestres ( $M_{\oplus}$ ).

Nº	Planeta	Semieixo maior (ua)	Período orbital (ano)	Massa ( $M_{\oplus}$ )
1	A	1,1	1,63	0,165
2	B	1,9	3,70	0,815
3	C	3,5	9,26	1,500
4	D	6,7	24,53	0,207
5	E	25,9	185,33	419,00
6	F	51,5	522,67	95,20
7	G	102,7	1471,87	14,50

- Encontre uma fórmula empírica, do tipo da fórmula de Titius-Bode, para descrever os semieixos maiores deste sistema planetário.
- Estime o semieixo maior e o período orbital do planeta faltante.
- Estime a massa da estrela central deste sistema.

4) Na década de 1680's o inglês Isaac Newton (1642-1727) propôs para explicar a Teoria da Gravitação Universal que se lançou por um canhão horizontalmente posicionado no topo de uma montanha muito alta (para evitar o atrito com atmosfera terrestre), a uma velocidade adequada (vide **Figura 1**), um corpo giraria para sempre em torno da Terra da mesma forma que a Lua o faz. Estava lançada a ideia dos satélites artificiais. Satélites são lançados ao espaço por meio de foguetes, os quais sobem na vertical e, paulatinamente, são manobrados para adquirem a orientação horizontal, como aquela do canhão da **Figura 1**. Os soviéticos foram os primeiros a conseguirem tal façanha, colocando o Sputnik em órbita da Terra em 4 de outubro de 1957.

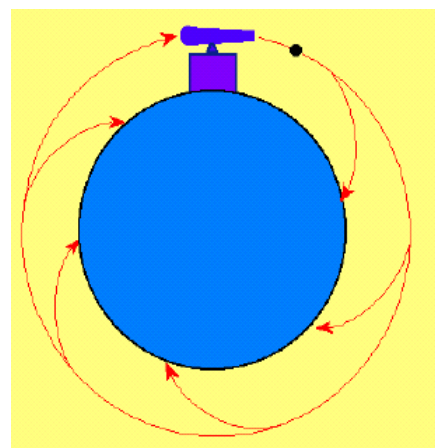


Figura 1

O Programa Espacial Brasileiro desenvolve o seu Veículo Lançador de Satélites (VLS), por meio do Instituto de Aeronáutica e Espaço (IAE), localizado na cidade de São José dos Campos, SP. Para colocar um satélite em uma órbita distante 750 km da superfície da Terra é necessário alcançar a velocidade de 27 000 km/h, velocidade esta paralela à superfície terrestre. Ao invés do topo da montanha, o VLS é lançado do Centro de Lançamento de Alcântara (CLA), localizado no litoral do nordeste brasileiro numa latitude de  $2^{\circ}$  S, vide **Figura 2**.

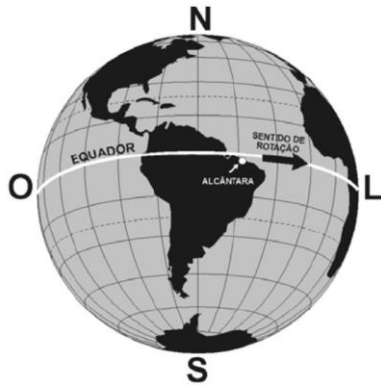


Figura 2



Figura 3

Para alcançar a velocidade de 27 000 km/h, o VLS faz uso de uma grande quantidade de combustível (denominado propelente) que é distribuída em sete motores, distribuído em quatro estágios. O primeiro estágio é composto de quatro motores. Eles são fixados lateralmente em relação ao corpo central composto pelos segundo, terceiro e quarto estágios e pelo satélite, que vai no topo do foguete, protegido por uma carenagem denominada coifa. Os motores são queimados sucessivamente sendo descartados no mar após o consumo do propelente. Como o lançamento ocorre verticalmente, uma série de eventos ocorre até a colocação do satélite em órbita.

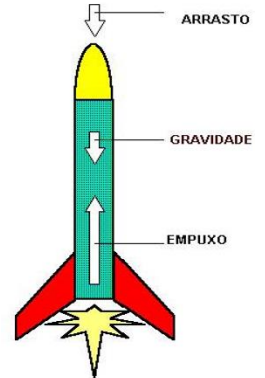
A força propulsora para tirar o VLS do solo, denominada Empuxo, que é gerada pela queima do propelente dos quatro motores do primeiro estágio, deve ser superior ao Peso. De uma forma geral, 80% do combustível é consumido para vencer a gravidade e acelerar o foguete. Os outros 20% são consumidos para vencer a força de arrasto que, predominantemente, resulta do atrito do foguete com o ar atmosférico.

A Tabela abaixo apresenta alguns eventos relativos ao voo do VLS, para colocar um satélite de 86 kg em órbita da Terra. Ao serem acionados, os quatro motores do primeiro estágio do VLS fornecem 1 000 000 N de empuxo. A ignição do segundo estágio ocorre 15 segundos antes do fim de queima dos quatro propulsores do primeiro estágio, enquanto a ignição do terceiro estágio somente pode ser efetuada após o consumo de todo o combustível do motor do segundo estágio. Como acima dos 100 km de altitude tem-se o vácuo do espaço, a coifa que protege o satélite contra o atrito atmosférico pode ser ejetada, o que ocorre aos 133 segundos de voo. Após a separação do terceiro estágio, o conjunto quarto estágio/satélite está inclinado de 52°, em relação à vertical. No entanto, a ignição do motor do quarto estágio somente ocorre após uma manobra (basculamento) que visa colocar o conjunto com seu eixo longitudinal paralelo à superfície terrestre, semelhante ao canhão da **Figura 1**. Os 36 segundos de queima do motor do quarto estágio são suficientes para atingir a velocidade orbital de 7 500 m/s. Finda a queima do combustível do quarto estágio, o mesmo é separado do satélite e ambos ficam em órbita da Terra.

EVENTO	Tempo [s]	Altitude [km]	Massa [kg]	Velocidade[m/s]
Início do voo vertical	0,0	0,062	50 000	0
Fim do voo vertical	5,0	0,151	47 577	40
Ignição do segundo estágio	53,0	17,9	24 771	1 310
Fim de queima do primeiro estágio	68,0	33,1	20 000	1 765
Separação do primeiro estágio	70,0	35,3	14 000	1 780
Fim de queima do segundo estágio	124,0	108,7	8 391	2 799
Separação do segundo estágio/Ignição do terceiro estágio	125,0	110,3	6 967	2 793
Ejeção da coifa (protege o satélite)	133,0	123	6 515	2 924
Fim de queima do terceiro estágio	193,0	243	2 423	5 168
Separação do terceiro estágio	196,0	251	1 363	5 155
Início da manobra de basculamento	200,0	263	1 363	5 137
Fim da manobra de basculamento	260,0	399	1 363	4 891
Ignição do quarto estágio	461,1	707	1 134	4 337
Fim de queima do quarto estágio	532,1	743	326	7 500
Separação do quarto estágio/Colocação do satélite em órbita	532,1	743	86	7 500

Questões:

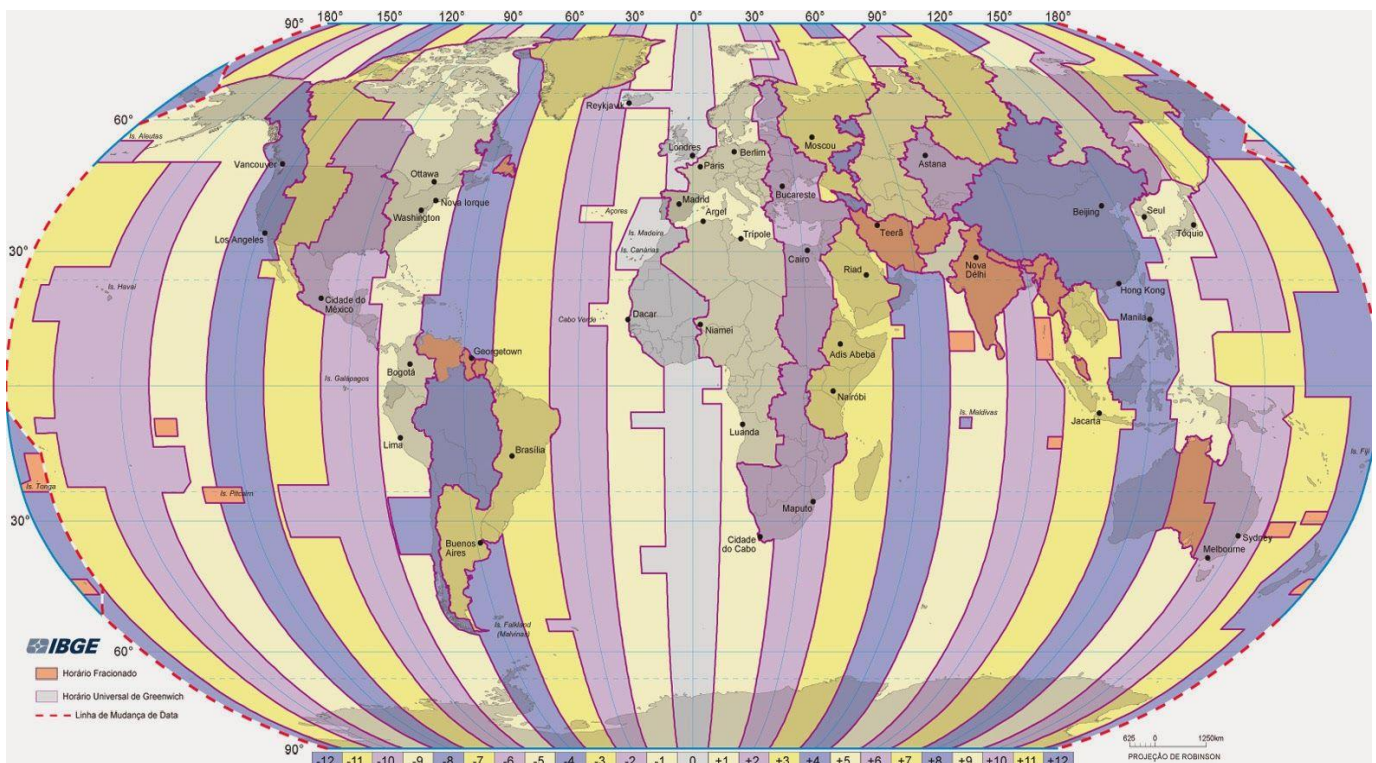
- a) Considerando que o raio da Terra é de 6 400 km e sabendo-se que a Terra completa um giro em torno do seu próprio eixo em 24 horas, determine a velocidade tangencial do VLS, em km/h, quando ele está posicionado verticalmente na sua plataforma de lançamento, prestes a ser lançado. Nos seus cálculos, assuma que o CLA (Centro de Lançamento de Alcântara) está localizado exatamente sobre o Equador terrestre (vide **Figura 2**) e que  $\pi = 3$ .
- b) Sabendo-se que para colocar um satélite em órbita a 743 km de altitude é necessária uma velocidade de 27 000 km/h, você lançaria o VLS no sentido Oeste → Leste ou Leste → Oeste (**vide Figura 2**)? Justifique sua resposta.
- c) Usando a Segunda Lei de Newton e assumindo que a aceleração da gravidade ao nível do mar é de  $10 \text{ m/s}^2$ , estime a aceleração do VLS no momento da ignição dos quatro propulsores do primeiro estágio.
- d) Considerando que o propulsor do segundo estágio do VLS consome 120 kg de propelente a cada segundo, estime a massa de propelente dos 4 propulsores do primeiro estágio.
- e) A tabela mostra que entre o início e final da manobra de basculamento há um decréscimo na velocidade do conjunto quarto estágio/Satélite. Como vocês explicam esse decréscimo de velocidade.



**Prova em Grupo – Dados e Constantes**

- Raio do Sol:  $R_{\odot} = 6,955 \cdot 10^8 \text{ m}$   
 Massa do Sol:  $M_{\odot} = 1,989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$   
 Massa da Terra:  $M_{\oplus} = 5,974 \cdot 10^{24} \text{ kg}$   
 Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$   
 $1 \text{ ua} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$   
 $1 \text{ ano} = 3,15 \cdot 10^7 \text{ s}$

**Fuso Horário Civil**



## II Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

5 a 10 de setembro de 2010 – Bogotá - Colômbia



### Prova Teórica Individual

#### PROBLEMA 1

##### QUESTÃO 1: ASTRÔNOMO BOGOTANO.

Um observador em Bogotá, cuja longitude é  $\lambda = 74^{\circ}05'$  Oeste, mede o ângulo horário de uma estrela e obtém o valor  $H = 45^{\circ}30'$ . Sabendo que no instante da observação o tempo sideral em Greenwich era  $TSG = 12h30min$ , qual é a ascensão reta da estrela?

##### QUESTÃO 2: MEDINDO A MASSA DA VIA LÁCTEA.

Estima-se que o período de translação do Sol em torno do centro da Via Láctea seja de 250 milhões de anos e que sua distância ao centro seja de 25 000 anos-luz. A partir destes dados, e mediante o uso da Terceira Lei de Kepler, calcule a massa da Via Láctea. Expresse seu resultado em unidades de massas solares.

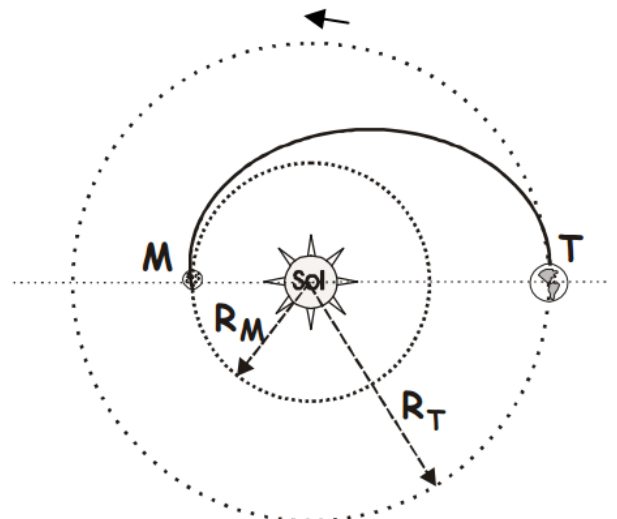
##### QUESTÃO 3: OLHANDO A LUA.

Na Lua estão os restos de uma nave que mede 4 m de comprimento. Propõe-se observá-la a partir da Terra usando um telescópio que trabalha com comprimento de onda  $\lambda = 5\,500 \text{ \AA}$  (luz visível) e que tem como objetiva um espelho de 5 m de diâmetro. É possível distinguir os dois extremos desta nave? Justifique sua resposta.

#### PROBLEMA 2: ASTRONÁUTICA – VIAJANDO PARA MERCÚRIO.

Os planetas Mercúrio ( $M$ ) e Terra ( $T$ ) orbitam em sentido anti-horário e num mesmo plano ao redor do Sol com raios  $R_M$  e  $R_T$ , respectivamente (i.e. órbitas circulares, coplanares e concêntricas). Deseja-se lançar, a partir da Terra, uma nave de tal forma que, movendo-se somente sob a ação da gravidade do Sol, colida com Mercúrio seguindo uma trajetória elíptica. Em termos dos raios orbitais, da massa solar,  $M_{Sol}$ , e da constante gravitacional,  $G$ , expresse:

- A velocidade em relação à velocidade da Terra com que se deve lançar a nave.
- O tempo que a nave vai gastar para ir da Terra até Mercúrio.
- Diga em que ponto da Terra, em qual direção e a que hora deve ocorrer o lançamento.



**PROBLEMA 3: A TERRA COMO UM CORPO NEGRO**

A Lei de Stefan-Boltzmann estabelece que um corpo negro irradie energia por unidade de área e por unidade de tempo proporcionalmente à quarta potência de sua temperatura absoluta, cuja expressão é  $F = \sigma T^4$ , onde  $F$  é o fluxo e  $\sigma$  a constante de Stefan-Boltzmann. A potência irradiada (luminosidade) pelo Sol é:

$$P_S = \sigma(4\pi R_S^2)T_S^4$$

A Terra está continuamente recebendo energia radiante proveniente do Sol. Ao mesmo tempo, como um todo, irradia energia para o espaço de tal forma que estabelece uma temperatura média que se encontra em equilíbrio com a radiação solar. Encontre a temperatura média da Terra,  $T_T$ , considerando-a como um corpo negro.

**PROBLEMA 4: EM BUSCA DO SOL**

Um andarilho caminha sobre a linha do equador em um dia de equinócio e começa a subir a encosta Norte de uma montanha quando o Sol está se pondo. A encosta da montanha está inclinada de  $10^\circ$  em relação ao horizonte e o caminhante avança de tal forma que, durante todo o tempo, vê o centro do Sol exatamente no horizonte. Durante quanto tempo ele pode avançar com uma velocidade  $v$  mantendo o Sol sempre dessa mesma maneira. Despreze a refração atmosférica.

**Prova Individual – Dados e Constantes**

Massa do Sol:  $M_\odot = 2,0 \cdot 10^{30}$  kg

Semieixo maior da órbita da Terra:  $a_\oplus = 1$  ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m

Semieixo maior da órbita de Mercúrio:  $a_M = 0,38$  ua

Raio do Sol:  $R_\odot = 7,0 \cdot 10^5$  km

Raio da Terra:  $R_\oplus = 6,37 \cdot 10^6$  m

Distância Terra-Lua:  $D_{T-L} = 3,84 \cdot 10^5$  km

Temperatura do Sol:  $T_\odot = 6\,000$  K

Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Velocidade da luz:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

Constante de Stefan-Boltzmann:  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup>K<sup>4</sup>)

1 ano =  $3,15 \cdot 10^7$  s

1 al =  $9,46 \cdot 10^{15}$  m

## Prova Teórica em Grupo

### PROBLEMA 1

#### QUESTÃO 1:

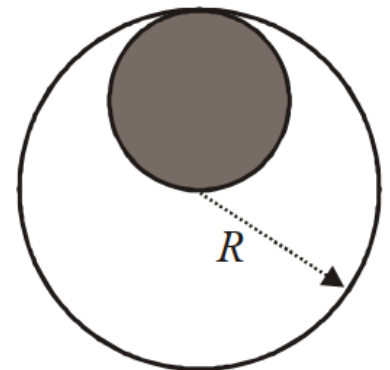
- 1.1. Com que velocidade um viajante deve avançar sobre a linha do Equador terrestre, e em que direção, para manter o Sol sempre no seu zênite?
- 1.2. Compare o valor obtido acima com a velocidade do som.
- 1.3. Que veículo é mais apropriado para obter essa velocidade?
- 1.4. Repetindo a primeira pergunta nas mesmas condições, mas estando o viajante na Lua, qual deve ser a sua velocidade?

#### QUESTÃO 2:

Estime a duração máxima de um eclipse total do Sol para um observador situado no Equador da Terra.

### PROBLEMA 2

Considere um planeta esférico de raio  $R$  e densidade  $\rho$  que tenha uma cavidade também esférica de raio  $R/2$ , preenchida de um material com densidade  $2\rho$  localizada como mostra a figura ao lado.



- 2.1. Determine, qualitativamente, o ponto sobre o Equador do planeta onde a velocidade de escape é mínima. Justifique sua resposta.
- 2.2. Se o centro da cavidade esférica coincidir com o centro do planeta, calcule a velocidade de escape.

### PROBLEMA 3

#### QUESTÃO 1:

As maiores manchas solares são da ordem de 10 vezes o diâmetro da Terra. Suponha que exista uma mancha solar com diâmetro  $\frac{1}{4}$  do diâmetro do Sol. Qual seria a diferença de sua magnitude quando a mancha solar (totalmente escura) estiver sobre o centro do disco visível, comparando ao caso em que o Sol não apresenta manchas?

#### QUESTÃO 2:

A rotação do Sol é estudada com base nas manchas solares. O efeito Doppler também é utilizado para medir a rotação de objetos celestes. Ao observar o limbo do equador solar na linha H-Alpha, registra-se um deslocamento Doppler de  $0,045 \text{ \AA}$  e quando se observa a  $60^\circ$  de latitude se registra um deslocamento de  $0,019 \text{ \AA}$ .

- 2.1 Calcule a velocidade de rotação do Sol no equador e a  $60^\circ$  de latitude.
- 2.2 Calcule o período de rotação no equador e a  $60^\circ$  de latitude.
- 2.3 O que você pode deduzir a partir dos resultados obtidos?

**Prova em Grupo – Dados e Constantes**

Raio da Terra:  $R_{\oplus} = 6\,400$  km

Raio da Lua:  $R_L = 1\,740$  km

Raio do Sol:  $R_{\odot} = 7,0 \cdot 10^5$  km

Diâmetro da sombra da Lua:  $D = 200$  km

Velocidade do som:  $v = 340$  m/s

Velocidade da luz:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

Comprimento de onda em repouso da linha H-Alpha:  $\lambda_0 = 6\,563 \cdot 10^{-10}$  m

Mês sinódico lunar: 29,5 dias

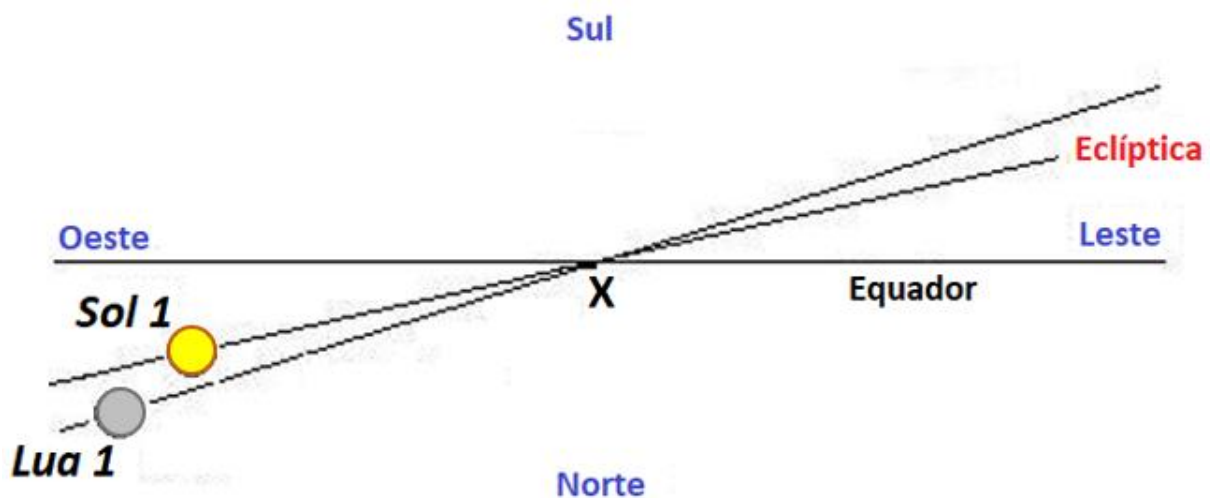
III Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica  
23 a 30 de outubro de 2011 – Passa Quatro – Brasil



### Prova Teórica Individual

**Questão 1)** A *figura 1* representa um segmento do céu, num dado instante, em que são mostrados o equador celeste, a eclíptica e a trajetória aparente da Lua no céu. A Lua e Sol definem, aproximadamente, a escala da figura. Observe com atenção todos os detalhes da figura.

- Desenhe a posição do Sol aproximadamente 24 h depois da posição *Sol 1*. Denomine-a *Sol 2*.
- Quantos dias, aproximadamente, levará o Sol para atingir o equinócio? Respeite a escala da figura.
- Desenhe a posição do Sol no equinócio e denomine-a *Sol 3*. Diga o nome da estação do ano que começa no hemisfério Sul quando o Sol está nesta posição.
- Desenhe a posição da Lua, aproximadamente, 1 h depois da posição *Lua 1*. Denomine-a *Lua 2*.
- Estime em quantas horas a Lua atingirá o nodo descendente de sua órbita em relação à eclíptica



**Figura 1** - Figura esquemática de um segmento da esfera celeste.  
Diâmetros aparentes do Sol e da Lua valem  $0,5^\circ$ .

**Questão 2)** Um par de estrelas gravitacionalmente ligadas pode, em primeira aproximação, ser comparado a uma gangorra em equilíbrio onde é válida a constância do produto massa pela distância dessa massa ao centro de gravidade do sistema em relação aos dois lados da gangorra.

Tem-se um par físico de estrelas, chamadas binárias, em que a estrela 1 tem massa duas vezes maior que a da estrela 2. Admitindo que as órbitas sejam circulares e que a distância da estrela 1 ao centro de gravidade do par em equilíbrio gravitacional seja igual a 2 ua, calcule a distância entre as estrelas em ua.

**Questão 3)** Meridianos celestes são círculos máximos da esfera celeste que passam pelos polos celestes. Ângulo horário de um astro é o ângulo formado pelo círculo (celeste) horário do astro com o meridiano de um lugar. Vemos o Sol passar pelo meridiano de um lugar de longitude 2h 40min a Oeste do meridiano de *Greenwich*. Num lugar de longitude 2h a Oeste do meridiano de *Greenwich*, naquele mesmo instante, determine:

- Qual o ângulo horário, em graus, sob o qual o Sol seria visto?
- Em que lado (Oeste ou Leste) do meridiano local se encontra o Sol?

**Questão 4)** Ciclicamente, Sol e Lua se veem próximos um do outro e, aproximadamente duas semanas após, encontram-se em máxima distância. Imagine a Lua Cheia ocorrendo sobre o ponto equinocial de Virgem. Qual a estação que estará começando para o hemisfério Sul?

**Questão 5)** A magnitude limite das estrelas mais fracas que uma pessoa pode ver com um telescópio depende de vários parâmetros. O diâmetro da lente ou espelho da objetiva é o parâmetro mais importante. Quanto maior o telescópio, mais luz ele coleta e menor (mais brilhante) é a magnitude limite. O olho é um detector astronômico muito limitado. O diâmetro médio da nossa pupila, adaptada no escuro, tem  $d = 0,6$  cm. Assim, em condições ideais, uma pessoa possa enxergar estrelas de até magnitude  $m = 6$ .

Considere uma pequena luneta, com diâmetro  $D = 6,0$  cm de abertura.

- a) Considerando apenas a razão entre as áreas coletoras, determine o quanto a mais de luz coleta a pequena luneta em relação ao olho.
- b) Determine a magnitude limite  $m_{luneta}$  de uma estrela observada através desta luneta.

**Questão 6)** Sendo de  $23^\circ$  o ângulo de máxima elongação de Mercúrio, calcule sua distância ao Sol em função da distância Terra-Sol.

**Questão 7)** Considere que, no lugar da Terra, orbita Urano que, dentre seus satélites, possui um como as mesmas características da Terra em massa e volume.

- a) Qual o período orbital de Urano nesta nova situação?
- b) Determine a distância necessária para que Urano produza a mesma intensidade de força gravitacional sobre seu satélite (Terra), como a que a verdadeira Terra produz sobre sua Lua.
- c) Determine o período orbital, em dias terrestres, do satélite (Terra) ao redor de Urano.

**Questão 8)** A velocidade para se colocar um foguete em órbita é de 28 000 km/h. Na maioria dos casos um mesmo foguete faz uso de combustível sólido e líquido. Na terminologia espacial, o combustível e o oxidante são denominados propelentes. Na prática as toneladas de propelentes utilizadas para colocar um satélite em órbita são armazenadas em diferentes tanques, denominados estágios. Dessa forma, após a queima do combustível do primeiro estágio, os tanques de combustível e oxidante são descartados e o voo continua, com o acionamento sucessivo dos demais estágios. Armazenar e transportar todo o combustível e oxidante em tanque único é ineficiente, uma vez que durante boa parte do voo estar-se-ia acelerando uma massa inerte, representada pela estrutura da parte vazia do tanque. Em geral o número de estágios de um foguete varia entre 3 e 4, uma vez que um maior número de estágios requer uma massa adicional para alojar o sistema de separação de estágios.

A tabela abaixo fornece o ganho de velocidade obtido pela queima de cada um dos quatro estágios do Veículo Lançador de Satélites (VLS-1) brasileiro para se lançar um satélite de 100 kg.

Estágio	$M_{\text{propelente}}$ [kg]	$M_{\text{estrutura}}$ [kg]	$\Delta v$ [m/s]
Primeiro	29 000	5 500	2 169
Segundo	7 250	1 375	1 650
Terceiro	4 544	1 183	2 704
Quarto	808	240	3 042
<b>Total</b>	<b>41 602</b>	<b>8 298</b>	<b>9 565</b>

- a) A partir dos dados apresentados na Tabela, estime:
  - i) a relação entre a massa de propelente e a massa total do foguete na decolagem; e
  - ii) a relação entre a massa do satélite e a massa total do foguete na decolagem.

**OBS:** Expresse os seus resultados em termos percentuais.

b) Os dados de velocidade da tabela não consideram os efeitos da gravidade (que ocorre durante todo o voo) e do atrito do foguete com a atmosfera terrestre (que ocorre enquanto o foguete voa no interior da atmosfera terrestre, que tem 100 km de espessura, aproximadamente). Ambos os efeitos diminuem o ganho de velocidade teórico. Consequentemente, o valor de  $\Delta v$  real do VLS-1 é 80% daquele obtido a partir da equação do foguete. Baseado neste fato, expresse qual a velocidade final do VLS-1 após a queima dos seus quatro estágios. Expresse a velocidade em km/h.

#### Prova Individual – Dados e Constantes

Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2/\text{kg}^2$

Massa da Lua:  $M_L = 7,36 \cdot 10^{22} \text{ kg}$

Massa da Terra:  $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Massa de Urano:  $M_U = 14 \cdot M_{\oplus}$

Distância Terra-Lua:  $3,84 \cdot 10^5 \text{ km}$

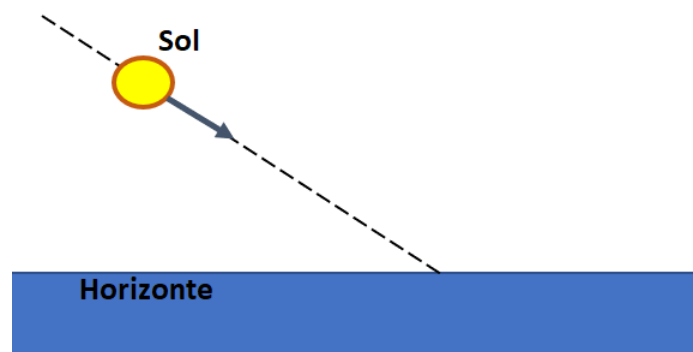
### Prova Teórica em Grupo

**Questão 1)** Os diâmetros aparentes do Sol e da Lua são da ordem de  $0,5^\circ$ . Isto corresponde a um ângulo de  $\sim 0,01$  radiano. Para ângulos pequenos podemos substituir a tangente do ângulo pelo arco que define o radiano. Assim, podemos determinar facilmente os tamanhos das imagens da Lua e do Sol formadas no plano focal do telescópio.

- Um telescópio de diâmetro igual a 1 m tem 10 m de distância focal. Calcule o diâmetro da imagem da Lua Cheia no plano focal desse telescópio.
- Um telhado tem um furinho de 0,5 mm e forma no chão uma imagem de 10 cm do Sol, estando o Sol no zênite. Calcular a altura, em metros, do telhado.

**Questão 2)** Considere um barco situado em longitude de  $32^\circ \text{ W}$ , com seu relógio de tempo solar verdadeiro avariado. O marinheiro vê o Sol sobre o meridiano superior do lugar em 21 de dezembro.

- Neste instante, qual é o tempo sideral local?
- Qual hora deveria estar indicando o relógio do marinheiro se este estivesse funcionando?
- Desprezando a Equação do Tempo, indique a Hora Legal em *Greenwich*.
- Considere o esquema abaixo, que representa o pôr do Sol visto do barco nesse dia. Estime a latitude em que se encontra o barco.



**Questão 3)** Da superfície da Terra vemos a Lua com um diâmetro aparente de  $0,5^\circ$ . Se você estivesse na superfície da Lua, veria a Terra com que diâmetro aparente? Considere o raio da Terra igual a 6 400 km, o raio da Lua é igual a 1700km e que a distância Terra-Lua é igual a 384 400 km.

**Questão 4)** Durante o máximo de um eclipse lunar total, quando a Lua está completamente dentro do cone de sombra da Terra (umbra), ainda vemos a Lua com uma coloração avermelhada.

- Por que ocorre coloração?
- Se você estivesse na superfície da Lua neste momento, como veria a Terra?

**Questão 5)** Um radiotelescópio mede ondas de rádio e opera, tipicamente, entre frequências da ordem de alguns megahertz (MHz) até algumas centenas de gigahertz (GHz). Ao observar objetos celestes na faixa de rádio, percebemos que a radiação recebida é extremamente fraca, mesmo que, na sua origem, a fonte emissora seja muito intensa. Ela é tão fraca que é conveniente utilizar uma outra unidade, conhecida por *jansky* (Jy), para expressar esse fluxo. 1 Jy vale  $10^{-26} \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{Hz}^{-1}$ , o que significa coletarmos  $10^{-26}$  joules de energia por segundo em um espelho de  $1 \text{ m}^2$ , por unidade de frequência. Sabemos que qualquer detector opera em um determinado intervalo (ou largura de banda) do espectro eletromagnético, com o máximo de eficiência numa frequência ou comprimento de onda central, dependendo da faixa do espectro em que estamos observando.

Vamos supor que o radiotelescópio de Arecibo, o maior do mundo, com um diâmetro de 300 m, observe a radiofonte extragaláctica conhecida como Cygnus A, localizada a 237 Mpc da Terra. A frequência central de operação é 430 MHz, assumindo uma largura de banda de 20 MHz. O fluxo de Cygnus A na frequência de Arecibo, é de 4 200 Jy.

- Qual o valor da energia que os radio astrônomos de Arecibo devem medir, para a banda assumida, ao observar Cygnus A por 1 hora?
- Quanto tempo seria necessário observar Cygnus A, para que a energia captada fosse suficiente para acender uma lâmpada de 100 W por apenas 1 segundo?
- A potência da Radiação Cósmica de Fundo em micro-ondas ( $\sim 100 \text{ GHz}$ ) é de  $10^{-18} \text{ W}$ . O telescópio de Arecibo seria capaz de coletar a energia necessária para acender a mesma lâmpada num intervalo de tempo razoável comparado com a expectativa de vida do ser humano? Justifique sua resposta.

**Questão 6)** Um sistema binário eclipsante é formado por estrelas de luminosidades iguais a  $L_1 = 3L_0$  e  $L_2 = 1L_0$  e raios  $R_1 = 2R_0$  e  $R_2 = 1R_0$ , onde  $L_0$  e  $R_0$  são, respectivamente, a luminosidade e o raio solar. Considerando que as órbitas sejam circulares e que o plano orbital do sistema está paralelo à direção da linha de visada do observador.

- Encontre a diferença entre as magnitudes aparentes máxima e mínima do sistema.
- Faça um esboço do gráfico da variação de magnitude do sistema ao longo de um período orbital, respeitando as relações de brilho e aproximando a duração das superposições.

**Questão 7)** Quase três séculos após Newton ter revelado a Teoria da Gravitação Universal, foi a vez do homem virar a lua da Lua. A primeira vez que tal ocorreu foi na noite de Natal de 1968, quando 3 americanos foram capturados pelo campo gravitacional lunar e a orbitaram a 110 km da sua superfície. Entre 1969 e 1972, doze seres humanos pisaram na superfície lunar. Após várias décadas sem missões à Lua, nossa civilização planeja novas viagens ao satélite natural da Terra. Entre 2013 e 2017 haviam 7 missões não tripuladas programadas.

Uma dessas missões pretendia colocar uma espaçonave em órbita da Lua, com o propósito de fotografar sua superfície para identificar futuros locais para o estabelecimento de colônias humanas. Como a Lua não possui atmosfera, a definição da altitude orbital (distância  $h$  medida acima da superfície da Lua) é tomada em função da resolução (qualidade) da imagem (quanto mais próxima da superfície estiver a espaçonave melhor será a qualidade da imagem) e do ângulo de visada (quanto mais distante da superfície maior será a área fotografada, porém em qualidade inferior).

- a) Os técnicos avaliaram duas possíveis altitudes:  $h_1 = 3R$  e  $h_2 = 15R$ . Considerando que a Lua tem massa  $M$  e raio  $R$ , determine a razão entre as velocidades  $v_2$  e  $v_1$  para essas possíveis altitudes.
- b) Calcule quantas voltas daria uma nave espacial na órbita de altura  $h_1$  quando a outra nave ( $h_2$ ) completar uma volta.

**Questão 8)** Para determinar a localização de um ponto da superfície terrestre pelo sistema *GPS* é necessário a recepção de sinais de pelo menos quatro satélites. O princípio de funcionamento é puramente geométrico. A localização do receptor é o ponto de intersecção das esferas imaginárias que tem origem em cada satélite e raio igual à distância entre o satélite e o receptor. O processo é conhecido pelo nome de trilateração em três dimensões. Para lhe oferecer uma ideia de como isso funciona, propomos um exercício envolvendo trilateração (triangulação) em duas dimensões, no qual você deverá utilizar circunferências centradas nas cidades das quais possui a informação. O exercício é uma espécie de quebra-cabeças no qual lhe serão oferecidas informações a partir das quais você determinará onde se encontra.

Imagine que você esteja em alguma cidade na América do Sul, mas sem saber onde se encontra. De um morador local você recebe a seguinte informação: "Você está a 1 500 km de Assunção," o que, convenhamos não resolve o seu problema de localização. Você, então, decide perguntar a um segundo morador, que lhe responde: "Você está a 2 000 km de La Paz." Parece que a situação ficou mais confusa porque você logo imagina: como posso estar, ao mesmo tempo, a 1 500 km de Assunção e 2 000 km de La Paz? Quase que entrando em desespero você decide perguntar a uma terceira pessoa que lhe afirma: "Você está a 2 000 km de Porto Alegre." Você entra em desespero e olha para o céu em busca de inspiração. E do céu você recebe uma cápsula no interior da qual se encontra uma tabela e um mapa (vide a seguir). Você conclui que essas informações lhe serão úteis para resolver o enigma. Boa Sorte!

- a) Utilizando a Tabela de Distâncias, descubra qual é a cidade onde se encontra.

**Tabela de distâncias aproximadas entre cidades (km)**

	Assunção	Buenos Aires	La Paz	Porto Alegre	Porto Seguro	Presidente Prudente	Santiago
Assunção	-	1 100	1 500	800	2 200	800	1 500
Buenos Aires	1 100	-	2 200	860	2 790	1 500	1 100
La Paz	1 500	2 200	-	2 000	3 100	2 000	2 000
Porto Alegre	800	860	2 000	-	2 000	860	2 000
Porto Seguro	2 200	2 790	3 100	2 000	-	1 500	3 600
Presidente Prudente	800	1 500	2 000	860	1 500	-	2 200
Santiago	1 500	1 100	2 000	2 000	3 600	2 200	-

- b) Represente o processo de trilateração em duas dimensões, que justifique sua resposta, no mapa a seguir.



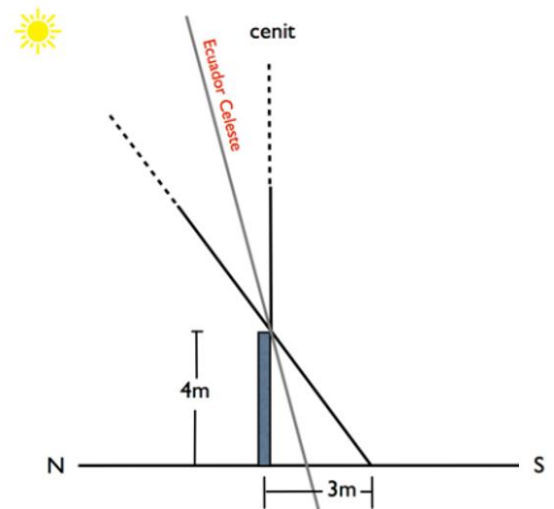
**IV Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
09 a 15 de setembro de 2012 – Barranquilla – Colômbia



**Prova Teórica Individual**

**1) Observação do Sol.** Um observador, no dia de solstício de junho, conhece a altura de um poste e mede sua sombra durante a passagem do centro do disco solar pelo meridiano do lugar. Determine:

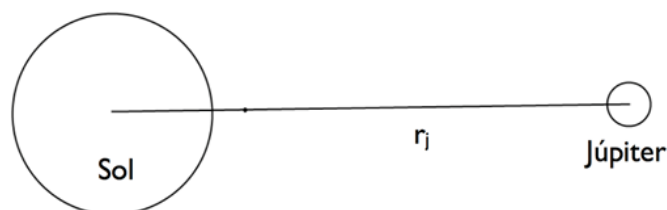
- O azimute,  $A$ , do Sol nesse instante (considere como origem da coordenada esférica o ponto cardeal Norte e o sentido positivo na direção do Leste).
- A declinação,  $\delta$ , do Sol.
- A ascensão reta,  $\alpha$ .
- O ângulo horário,  $H$ .
- O tempo (hora) sideral local,  $TSL$ , para este instante.
- A altura,  $h$ , do Sol.
- A latitude geográfica,  $\varphi$ , deste observador.



**2) Luminosidade em um sistema binário.** Sejam duas estrelas de um sistema binário com magnitudes aparentes de 2 e 4, separadas de 2,5 anos-luz e a uma distância de 35 pc da Terra. Considere o plano orbital do sistema paralelo à nossa linha de visada.

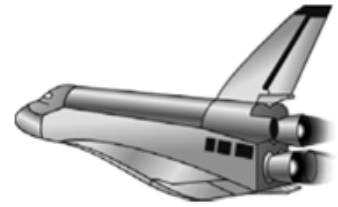
- Calcule a magnitude absoluta de cada estrela.
- Faça um esboço do gráfico da luminosidade ao longo de um período de translação para o sistema.
- Determine a magnitude total do sistema.

**3) Sistema Sol-Júpiter.** Sabendo que a massa do Sol é aproximadamente 1 000 vezes a massa de Júpiter e que a distância Sol-Júpiter é, aproximadamente,  $8 \cdot 10^{11}$  m:



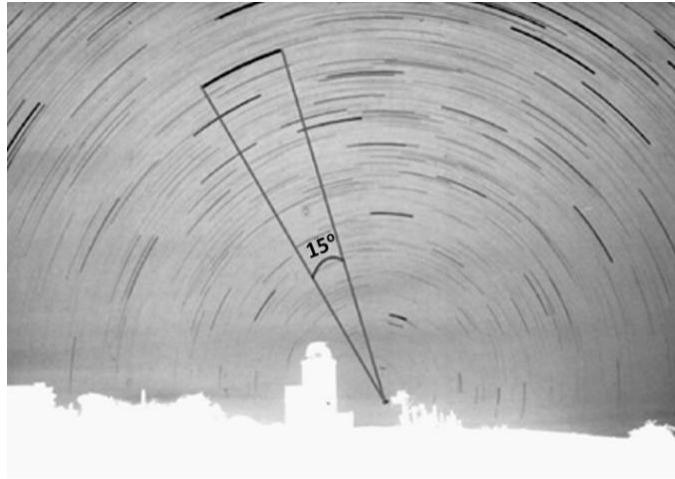
- Calcule a distância entre o centro de massa do sistema Sol-Júpiter ao centro do Sol.
- Determine o valor do período, em anos terrestres, de translação do sistema.
- Calcule a distância, do centro do Sol ao longo da linha que une estes dois corpos, para a qual a força gravitacional de Júpiter se cancela com a força gravitacional exercida pelo Sol.

**4) Propulsão de um ônibus espacial.** O sistema de propulsão principal de um ônibus espacial consiste em três motores idênticos. Cada um deles queima combustível de Hidrogênio-Oxigênio à taxa de 750 lb/s e é expelido à velocidade de 12500 ft/s.



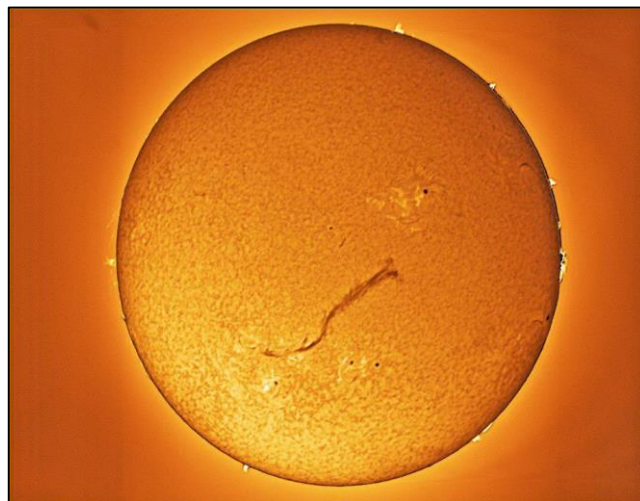
- Converta as unidades apresentadas para o Sistema Internacional de Unidades (SI), no passado conhecido como *MKS*.
- Determine o impulso total que os três motores fornecem à nave.

**5) Análise de fotografias astronômicas.**



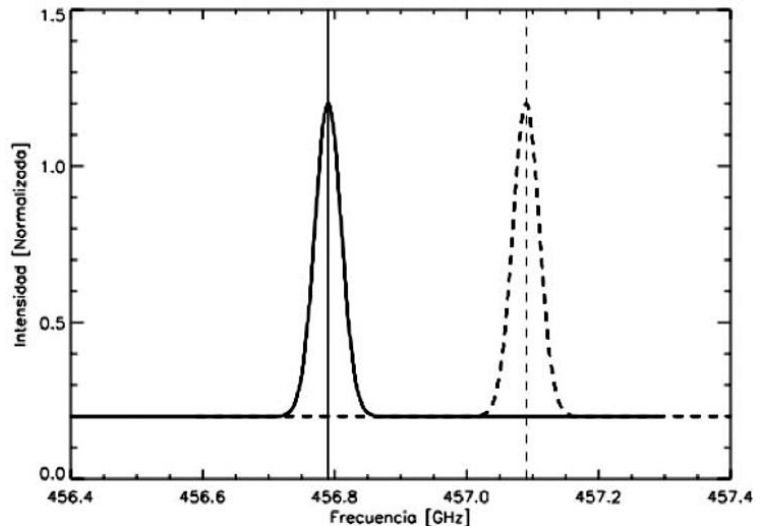
Sobre a imagem acima, responda:

- Se o polo visível do observador é o polo celeste Norte, em que hemisfério terrestre está situado o observador da imagem?
- Estime o tempo de exposição da astrofotografia.
- Indique, sobre a figura, o sentido do movimento diurno aparente dos astros.



- Estime o comprimento médio, em metros, do filamento solar que aparece na imagem acima sabendo que o diâmetro angular aparente do Sol é de 32,1 minutos de arco e que comprimento angular aparente do filamento é de 13,2 minutos de arco.

**6) Efeito Doppler e cálculo das velocidades de ejeção de matéria.** Uma das maneiras mais fáceis de determinar a que velocidade uma certa quantidade de matéria (associada a um evento de explosão solar, por exemplo) é ejetada ao longo da linha de visada, se faz mediante a análise espectral da linha  $H\alpha$ . Para tal, utiliza-se a expressão que relaciona o desvio Doppler do comprimento de onda com a velocidade na direção da linha de visada. Suponha que, no registro de um espectro de um desses eventos, encontrou-se um desvio para o azul dessa linha de emissão (linha tracejada) com respeito ao seu valor em repouso (linha contínua). Os centros das linhas são 456,79 GHz (linha contínua) e 457,09 GHz (linha tracejada).



- Determine o valor dos comprimentos de onda associados a linha contínua e tracejada.
- Calcule a velocidade com a qual a matéria foi ejetada.

#### Prova Individual – Dados e Constantes

Raio do Sol:  $R_{\odot} = 6,955 \cdot 10^8 \text{ m}$

Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

Velocidade da luz:  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

1 lb = 0,453 kg

1 ft = 0,305 m

1ua =  $1,5 \cdot 10^8 \text{ km}$

### Prova Teórica em Grupo

**1) Brilho de uma Estrela.** Betelgeuse é a nona estrela mais brilhante do céu noturno, com 1 000 vezes o raio do Sol. Calcule para esta estrela:

- O fluxo total sabendo que Betelgeuse tem  $1,2 \cdot 10^5$  vezes a luminosidade solar.
- Sua distância é de 197 pc. Qual seria seu fluxo se estivesse a um centésimo desta distância?
- Na situação indicada no item anterior (item b), determine qual seria a magnitude aparente de Betelgeuse usando a magnitude aparente do Sol como referência.
- A distância, em ua, até a qual se estenderia se estivesse no lugar do Sol. Estime qual seria o primeiro planeta que ficaria fora do raio da estrela. Despreze os efeitos gravitacionais.

**2) Gravitação.** A 3ª Lei de Kepler pode ser escrita na forma:  $T^2 = C \cdot R^3/M$ , onde  $C$  é uma constante universal e  $M$  é a massa do objeto central. Considere que o período orbital da Lua, entorno da Terra, é de  $T = 27,32 \text{ dias}$  e que seu raio orbital é  $R = 384\,000 \text{ km}$ .

- Calcule o valor da constante  $C$ .
- A massa de Saturno é 95 vezes a massa da Terra. Sabendo que um dos satélites naturais de Saturno possui período de  $234,01 \text{ dias}$ , encontre o raio da órbita, em ua, deste satélite entorno de Saturno.
- Considere que a massa da Terra seja aumentada para o triplo do seu valor atual. Nesta nova situação, qual seria o período da Lua entorno da Terra, mantendo-se o raio da orbital da Lua?

**3) Estudando uma galáxia.** Estudantes olímpicos observaram uma galáxia espiral *NGC OLAA*, cujos parâmetros são mostrados no quadro abaixo. Foi medido o comprimento de onda do centro do disco da galáxia, centrado na linha de emissão  $H\alpha$  (6 562,80 Å):

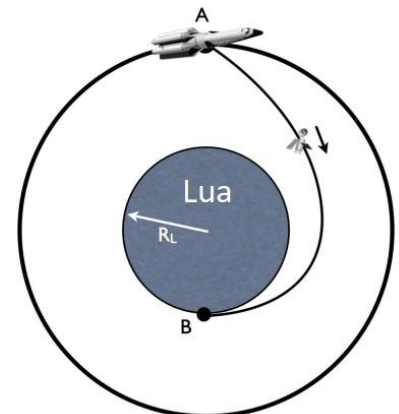


Galáxia	Dimensão angular	Distância ( $10^6$ al)	$\lambda_{\text{observado}}$ (Å)
NGC OLAA	$3,20^\circ \times 1,0^\circ$	2,5	6 556,22

- Determine o diâmetro da galáxia, em anos-luz, assumindo que seu disco é completamente circular e que os valores observados são os dados na tabela.
- Determine a inclinação ( $i$ ) normal ao disco com respeito à linha de visada.
- Determine a velocidade de recessão desta galáxia e o módulo do parâmetro  $z$  (*redshift*).
- Determine a magnitude absoluta da galáxia assumindo que sua magnitude aparente é 4,36.
- Será possível observar esta galáxia com um telescópio LX200 de 8" (8 polegadas) Schmidt-Cassegrain? Justifique sua resposta, mediante ao cálculo da magnitude limite deste telescópio.

**Comentário:** A magnitude limite de um telescópio é dada por:  $m_{\text{lim}} = 7,1 + 5 \log d$ ; onde  $d$  é o diâmetro da objetiva em cm. Adote:  $1'' = 1$  polegada = 2,54 cm.

**4) Atingindo o alvo.** Uma nave espacial A se encontra em órbita circular em torno da Lua a uma altitude de 1 000 km em relação à superfície lunar. Em um certo instante, uma sonda é lançada até um ponto B aplicando um impulso na direção contrária ao seu movimento de tal maneira que a mesma caia sobre a superfície da Lua como mostra a figura.

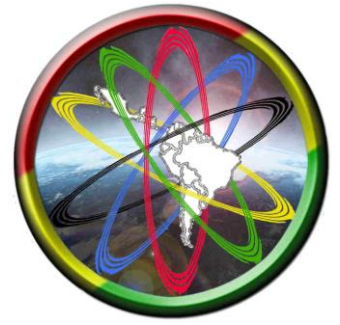


- Calcule a velocidade da nave no ponto A.
- Calcule a velocidade com que a nave espacial deverá lançar a sonda para que a manobra seja realizada com sucesso.
- Calcule a velocidade da sonda quando esta chega no ponto B.

**Prova em Grupo – Dados e Constantes**

- Massa da Terra:  $M_{\oplus} = 5,974 \cdot 10^{24}$  kg
- Massa da Lua:  $M_L = 7,4 \cdot 10^{22}$  kg
- Raio do Sol:  $R_{\odot} = 6,955 \cdot 10^8$  m
- Raio da Lua:  $R_L = 1 740$  km
- Luminosidade do Sol:  $L_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26}$  J/s
- Constante solar:  $F_{\odot} = 1366$  W/m<sup>2</sup>
- Magnitude aparente do Sol:  $m_{\odot} = - 26,72$
- Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>
- 1pc = 3,26 al =  $3,086 \cdot 10^{16}$  m
- 1ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m

**V Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
19 a 23 de outubro de 2013 – Cochabamba – Bolívia

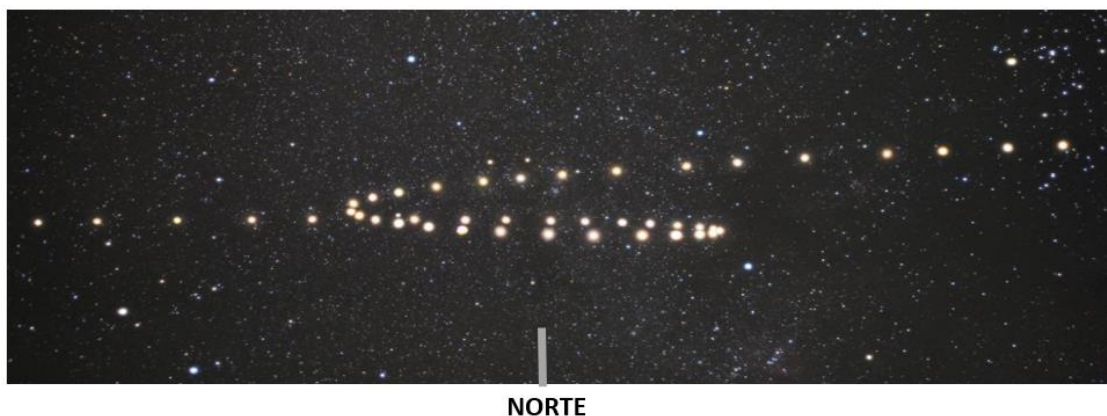


**Prova Teórica Individual**

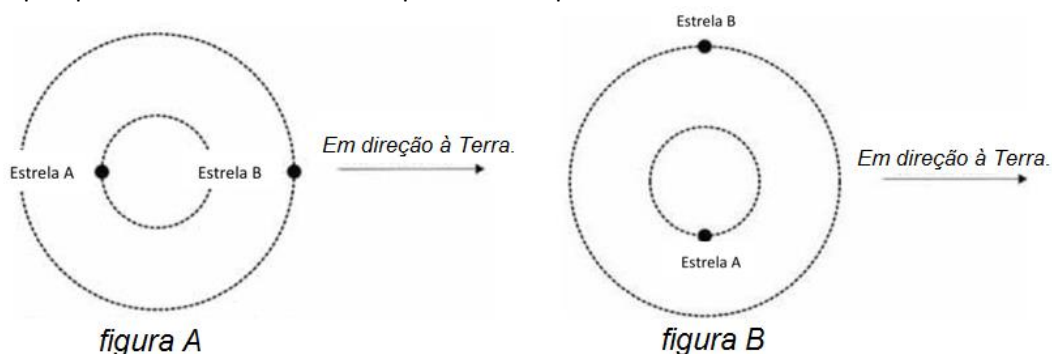
- 1) Calcule a densidade de um planeta, supostamente esférico e homogêneo, que tem um satélite artificial girando ao seu redor em uma órbita circular de período  $T = 6$  h. A altura do satélite é igual à metade do raio do planeta.
- 2) Determine a idade do Universo, em anos terrestres, quando o máximo de radiação cósmica de fundo correspondia a 700 nm. Considere que a temperatura do Universo é inversamente proporcional a raiz quadrada de sua idade e que a constante de proporcionalidade é  $1,5 \cdot 10^{10} \text{ K} \cdot \text{s}^{1/2}$ .
- 3) A estrela Vega tem magnitude aparente de 0,03, uma temperatura efetiva de 10 000 K e paralaxe de  $0,129''$ . Além disso, Vega é de tipo A0V. Considerando que a luminosidade de uma estrela é proporcional a sua massa ao cubo, responda:
  - a) A que distância, em anos-luz, se encontra Vega?
  - b) Que cor apresenta e onde está localizada no diagrama H-R?
  - c) Qual a magnitude absoluta de Vega?
  - d) Quantas vezes Vega é mais luminosa que o Sol?
  - e) Qual é o valor do raio de Vega em unidades de raios solares?
  - f) Qual é a massa de Vega?
  - g) Se nosso Sol tivesse as características de Vega, qual seria seu fluxo radiante na Terra?
- 4) Em um determinado lugar na superfície da Terra, o Sol cruza o meridiano em um ponto cujo azimute é  $180^\circ$  maior que o do polo elevado, com uma distância zenital que é igual à altura do polo elevado. Considerando a convenção de azimute *NESW*, quais serão as coordenadas horizontais do Sol:
  - a) Para um observador localizado em uma longitude de  $90^\circ$  a oeste do local inicial de observação?
  - b) No polo Sul?
- 5) A Lua é vista no horizonte como mostra a figura a seguir. Analisando a imagem, identifique e justifique astronômica em que fase a Lua está. Estime a hora neste instante e também se o horizonte mostrado é o ocidental ou oriental.



- 6) Na figura abaixo, veem-se várias fotografias sobrepostas do movimento aparente de um planeta ao longo das semanas. Considere um observador no hemisfério Sul, com o ponto cardeal Norte na direção indicada. Faça um esquema em sua folha de respostas indicando:
- O sentido de movimento do planeta.
  - O ponto onde ocorre a oposição.
  - Onde o planeta se encontra estacionário.
  - Explique qual é a causa da variação de seu brilho.



- 7) Em um sistema binário, as estrelas orbitam ao redor de um ponto comum. A luz de ambas é observada na Terra. Assuma que ambas emitem uma luz com comprimento de onda de  $6,58 \cdot 10^{-7}$  m.
- Quando as estrelas estão na configuração mostrada na figura A, o observador na Terra mede um comprimento de  $6,58 \cdot 10^{-7}$  m onda para ambas. Explique porque não existe efeito Doppler neste caso.
  - Quando as estrelas estão nas posições mostradas na figura B, o observador na Terra mede dois comprimentos de onda:  $6,50 \cdot 10^{-7}$  m para a estrela A e  $6,76 \cdot 10^{-7}$  m para a estrela B. Determine a velocidade das estrelas e indique qual está se distanciando e qual está se aproximando.

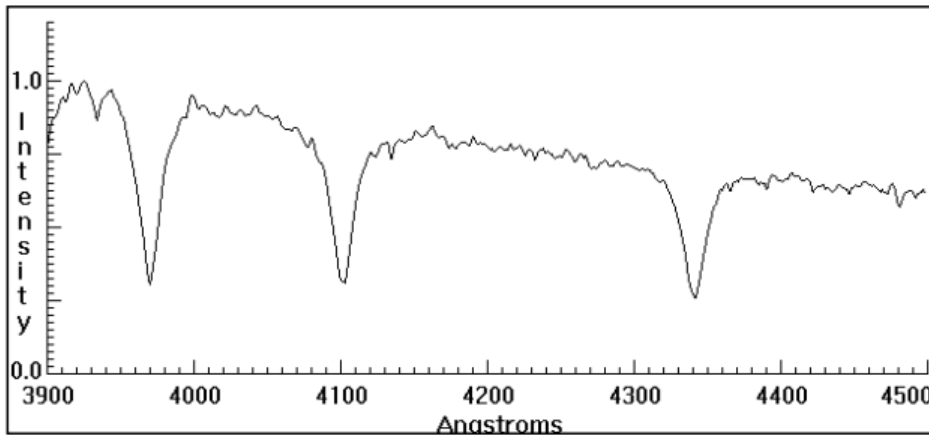


**Prova Individual – Dados e Constantes**

Raio da Terra:  $R_{\oplus} = 6\,371$  km  
 Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$   
 Velocidade da luz:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s  
 1 pc = 3,26 al = 206 265 ua  
 1 ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m  
 Magnitude absoluta do Sol = 4,72  
 Temperatura do Sol:  $T_{\odot} = 5\,778$  K  
 Massa do Sol:  $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg  
 Luminosidade do Sol:  $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{26}$  W

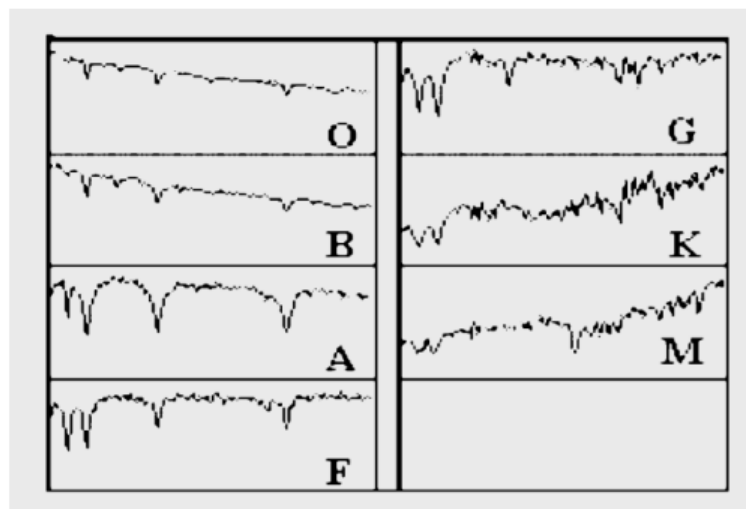
## Prova Teórica em Grupo

- 1) Logo abaixo está a curva que mostra a intensidade normalizada em função do comprimento de onda, em angstroms, de uma estrela. Tenha em conta que a intensidade para comprimentos de onda menores que 3900Å diminui. Inclui-se também, uma tabela que mostra os comprimentos de onda para diferentes linhas de absorção; e outra que mostra a relação entre a magnitude absoluta e tipo espectral. Finalmente, disponibilizamos os gráficos que mostram os espectros típicos para cada classe espectral.



3759.87	O III
3819.61	He I
3933.68	Ca II (K line)
3964.73	He I
3968.49	Ca II (H line)
3970.07	H I (H Epsilon)
4026.19	He I
4030.76	Mn I
4045.82	Fe I
4068.00	C III
4073.00	O II
4088.85	Si IV
4097.33	N III
4100.04	He II
4101.75	H I (H Delta)
4120.82	He I
4130.89	Si II
4143.76	He I
4143.88	Fe I
4226.74	Ca I
4300.00	CH & Metals (G Band)
4317.14	O II
4340.48	H I (H Gamma)
4383.56	Fe I
4387.93	He I
4471.48	He I
4471.68	He I
4481.20	Mg II
4541.00	He II
4552.62	Si III

TIPO ESPECTRAL	MAGNITUD ABSOLUTA (M)
O5	-5.8
B0	-4.1
B5	-1.1
A0	+0.7
A5	+2.0
F0	+2.6
F5	+3.4
G0	+4.4
G5	+5.1
K0	+5.9
K5	+7.3
M0	+9.0
M5	+11.8
M8	+16.0



Com estas informações:

- Identifique as quatro principais linhas de absorção indicando seus respectivos comprimentos de ondas e os elementos correspondentes.
- De acordo com a tabela, a que tipo espectral pertence a estrela? Justifique sua resposta.

- c) Estime a temperatura superficial da estrela, identificando onde se encontra o máximo de radiação.  
 d) Determine a distância da estrela observada assumindo que sua magnitude aparente é 9,5.
- 2) Um satélite de 300 kg de massa se encontra em uma órbita circular ao redor da Terra a uma altura de 500 km da superfície. Ele realiza uma manobra de tal maneira que passa para uma nova órbita circular cujo raio é o triplo da anterior. Neste contexto, responda:
- a) Qual é a variação de energia mecânica do satélite?  
 b) Qual é a relação entre os períodos das órbitas?  
 c) Deduza a expressão geral para a velocidade de escape do satélite a uma distância  $r$  medida desde o centro da Terra para este problema em particular. Qual a razão entre as velocidades de escape de ambas as órbitas?
- 3) Assuma que a luminosidade de uma estrela, que se encontra na sequência principal, obedece à seguinte proporção:  $L \propto M^4$ . Considere que a energia disponível para irradiação é igual a uma fração  $k$  da energia em repouso da estrela ( $M \cdot c^2$ ).
- a) Mostre que o tempo de vida da estrela,  $t$ , relaciona-se com a massa,  $M$ , segundo  $t \propto M^{-3}$ .  
 b) Caso duplicarmos a massa da estrela, qual seria a razão entre os tempos de vida?
- 4) Suponha que a matéria que compõe uma estrela na sequência principal obedece a equação de estado para um gás ideal, ou seja:  $pV = nkT$ ; onde  $k$  é a constante universal dos gases ideais.
- a) Mostre que, para uma estrela de raio  $R$  e massa  $M$ , é válido que:  $pR^3 \propto MT$ .  
 b) Considere que a estrela está em equilíbrio devido a ação da força gravitacional ( $F \propto \frac{M^2}{R^2}$ ), a qual tende a colapsá-la, e à pressão criada pelo fluxo de energia no seu interior, a qual tende a expandi-la. Mostre que, no equilíbrio:  $p \propto \frac{M^2}{R^4}$ .  
 c) Determine o valor da constante  $a$  de proporcionalidade na relação:  $T \propto \left(\frac{M}{R}\right)^a$ .  
 d) Considerando a densidade da estrela constante, determine o valor da constante  $b$  de proporcionalidade na relação:  $L \propto M^b$ .
- 5) Para o solstício de verão no hemisfério Sul:
- a) Mostre que a relação entre a latitude do observador ( $\phi$ ), a declinação do Sol ( $\delta$ ) e o ângulo horário ( $H$ ) do Sol no horizonte (nascer e ocaso) é:
- $$\cos H = -\operatorname{tg} \phi \cdot \operatorname{tg} \delta$$
- b) A partir desta relação, calcule quantas horas o Sol estará visível acima do horizonte para um observador no trópico de Capricórnio e outro no trópico de Câncer.  
 c) A partir da relação encontrada no item a, construa um gráfico do número de horas que o Sol passa acima do horizonte (horas-Sol) em função da latitude. Indique as latitudes importantes no gráfico, ou seja, os círculos paralelos ao equador que estão relacionados com a eclíptica.

**Prova em Grupo – Dados e Constantes**

Raio da Terra:  $R_{\oplus} = 6\,400$  km

Massa da Terra:  $M_{\oplus} = 6,010^{24}$  kg

Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Constante de Wien:  $b = 2,898 \cdot 10^{-3}$  m.K

Obliquidade da eclíptica:  $\varepsilon = 23^{\circ}27'$

**VI Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
10 a 16 de outubro de 2014 – Montevideu – Uruguai



**Prova Teórica Individual**

**PROBLEMA I**

A densidade de crateras – o número de crateras por unidade de área – em uma superfície planetária, ou em um satélite natural, pode nos fornecer dados sobre a idade de formação da superfície, especialmente se não há processos de erosão que apaguem os registros de impactos, pois as superfícies mais craterizadas serão mais antigas que as menos craterizadas. Analisando a superfície de um satélite natural de um planeta no Sistema Solar, encontra-se que existe uma região A de 900 000 km<sup>2</sup> de área com 3 200 crateras de raio maior ou igual a 100 metros. Também se encontra que existe outra região B com uma área de 1 200 000 km<sup>2</sup> contendo 2 000 crateras de raio maior ou igual a 100 metros. Assumindo que o fluxo de projéteis seja o mesmo em toda a superfície do satélite e que tem sido constante durante todo o tempo, calcule a idade da superfície A em relação com a de B.

- a) 1,33      b) 1,20      c) 2,66      d) 1,60      e) 2,13

**PROBLEMA II**

A seguinte função:

$$N(R) = 2 \cdot 10^6 \cdot R^{-2,5}$$

permite estimar a quantidade  $N$  de asteroides com raio maior ou igual a  $R$  quilômetros no cinturão principal, onde  $R$  deve ser expresso em km. Utilize a função para calcular o número de asteroides com raio maior ou igual a 10 km no cinturão principal.

- a) 2 336      b) 6 325 000      c) 2 000 000      d) 21 456      e) 6 325

**PROBLEMA III**

Assumindo que a luminosidade do Sol é  $L_{\odot} = 3,8 \cdot 10^{26}$  W e sabendo que sua fonte de energia provém da transformação de massa em energia dada pela equação  $E = mc^2$ .

1) Calcule quantos quilogramas por segundo se transformam em energia no Sol.

- a)  $4,2 \cdot 10^{15}$  kg/s      b)  $2,2 \cdot 10^9$  kg/s      c)  $4,2 \cdot 10^9$  kg/s      d)  $2,2 \cdot 10^{15}$  kg/s      e)  $3,2 \cdot 10^6$  kg/s

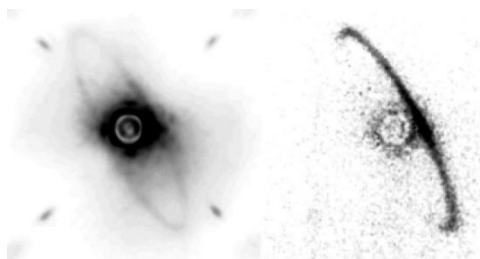
2) Calcule a energia por segundo e por metro quadrado que chega a Terra.

- a)  $1,8 \cdot 10^2$  J/m<sup>2</sup>      b)  $1,4 \cdot 10^3$  J/m<sup>2</sup>      c)  $1,3 \cdot 10^6$  W/m<sup>2</sup>      d)  $1,3 \cdot 10^3$  W/m<sup>2</sup>      e)  $1,8 \cdot 10^3$  W/m<sup>2</sup>

**PROBLEMA IV**

Há muito se tem observado que certas estrelas apresentam um excesso de emissão de radiação no infravermelho e que isso pode indicar a presença de um disco, anéis de poeira, ou asteroides ao redor das mesmas. Com telescópios convencionais não é possível observar diretamente esses discos porque a atmosfera reduz o poder de resolução

desses telescópios. Contudo, novas tecnologias, como a óptica adaptativa extrema, permitem, observar diretamente tais discos e até obter imagens de planetas em torno de outras estrelas. A óptica adaptativa extrema permite que os grandes telescópios cheguem ao limite teórico de seu poder de resolução. Imagine que há um anel de raio 10 ua ao redor de uma estrela a 25 pc de distância do Sol, como se mostra na figura.



*Imagem do anel no sistema HR4796 com óptica adaptativa extrema em  $\lambda = 1,6 \cdot 10^{-6}$  m. A luz da estrela foi removida da imagem.*

1) Encontre a distância angular sob a qual se veria, a partir da Terra, o raio do anel.

- a) 0,04"      b) 4,0"      c) 0,2"      d) 0,4"      e) 2,0"

2) Encontre o poder de resolução,  $\theta$ , do telescópio Gemini Sul, de 8,1 m de diâmetro, no comprimento de onda  $\lambda = 1,6 \cdot 10^{-6}$  m e responda se o anel da pergunta anterior é observável no referido comprimento de onda utilizando óptica adaptativa extrema.

- a)  $\theta$  aproximadamente igual a 0,05", é observável.  
 b)  $\theta$  aproximadamente igual a 0,5", é observável.  
 c)  $\theta$  aproximadamente igual a 0,5", não é observável.  
 d)  $\theta$  aproximadamente igual a 0,05", não é observável.  
 e)  $\theta$  aproximadamente igual a 1,4", é observável.

#### PROBLEMA V

Em um lugar do hemisfério Sul, cuja latitude se desconhece, sabe-se que a estrela  $\alpha$  Centauri é circumpolar. Um observador determinou a distância zenital máxima e mínima da estrela, encontrando os seguintes valores:  $Z_{\text{máx}} = 81^\circ$ ,  $Z_{\text{mín}} = 22^\circ 40'$ .

1) Calcule a latitude do lugar.

- a)  $-76^\circ 20'$       b)  $-9^\circ$       c)  $-58^\circ 20'$       d)  $-67^\circ 20'$       e)  $-38^\circ 10'$

2) Calcule a declinação da estrela.

- a)  $-38^\circ 10'$       b)  $-60^\circ 50'$       c)  $+9^\circ$       d)  $-58^\circ 20'$       e)  $-51^\circ 50'$

3) Calcule sua ascensão reta, sabendo que no momento de atingir a altura máxima o tempo sideral local é 14h40min.

- a) 09h20min      b) 00h00min      c) 14h40min      d) 12h00min      e) 02h40min

#### PROBLEMA VI

Um satélite artificial encontra-se em uma órbita geoestacionária sobre o Equador terrestre, ou seja, que a órbita é circular.

1) A que distância do centro da Terra deve-se colocar o satélite para que sua órbita seja geoestacionária?

- a) 6 500 km      b) 12 500 km      c) 24 600 km      d) 384 000 km      e) 42 300 km

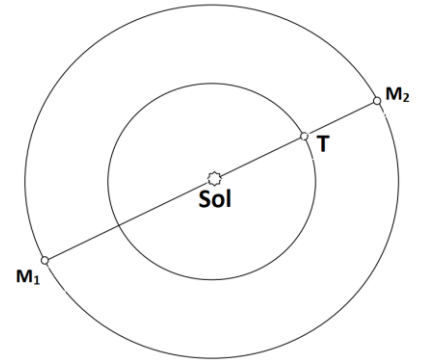
2) Com um único impulso na direção e sentido do movimento, pretende-se adquirir um incremento  $\Delta v$  na velocidade tal que o satélite adquira uma velocidade igual a de escape. Que incremento de velocidade,  $\Delta v$ , deverá ser aplicado ao satélite para que escape do campo gravitacional terrestre?

- a) 1,27 km/s      b) 0,35 km/s      c) 4,4 km/s      d) 3,82 km/s      e) 11,1 km/s

**PROBLEMA VII**

As duas posições  $M_1$  e  $M_2$  mostram, separadamente, Marte em conjunção e em oposição com o Sol em relação a Terra. Assumindo que as órbitas da Terra e de Marte sejam circulares e coplanares, de raios  $r_T = 1,00$  ua e  $r_M = 1,52$  ua, calcule quantas vezes maior é o fluxo luminoso de Marte recebido na Terra na oposição em relação à quando está próximo da conjunção.

- a) 82,0    b) 23,5    c) 2,0    d) 4,8    e) 4,0

**PROBLEMA VIII**

A estrela Sirius tem magnitude aparente  $-1,5$  e se encontra a uma distância de  $2,6$  parsecs. Sabe-se, ainda, que se trata de uma estrela de tipo espectral A1V com uma temperatura superficial de  $10\,000$  K.

1) Calcule a magnitude absoluta de Sirius.

- a)  $+1,4$     b)  $-3,5$     c)  $+2,8$     d)  $-7,5$     e)  $+4,2$

2) Calcule a luminosidade de Sirius, em relação ao Sol, sabendo que a magnitude absoluta do Sol é  $4,82$ .

- a)  $4,7$     b)  $23,0$     c)  $12,6$     d)  $12,7$     e)  $2,8$

3) Calcule o raio de Sirius, em relação ao Sol, sabendo que a temperatura superficial do Sol é  $5\,800$  K.

- a)  $1,2$     b)  $1,6$     c)  $2,4$     d)  $0,8$     e)  $3,1$

**PROBLEMA IX**

Considera-se que a matéria que compõem o universo é parte matéria bariônica, ou seja, basicamente átomos, e parte algo até agora desconhecido, que tem sido chamado de matéria escura. O parâmetro de densidade ( $\Omega$ )

$$\Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c}$$

é a razão entre a densidade de matéria  $\rho_m$  e a densidade crítica  $\rho_c$ , a qual se define como

$$\rho_c = \frac{3H_0^2}{8\pi G}$$

sendo  $H_0$  a constante de Hubble e  $G$  a Constante da Gravitação Universal. Sabendo que  $\Omega_m = 0,3$ , e que a matéria bariônica representa  $16\%$  de  $\rho_m$ , calcule a densidade de matéria escura atual no universo.

- a)  $3,1 \cdot 10^{-27}$  kg/m<sup>3</sup>    b)  $2,57 \cdot 10^{-27}$  kg/m<sup>3</sup>    c)  $4,12 \cdot 10^{-28}$  kg/m<sup>3</sup>    d)  $2,0 \cdot 10^{-27}$  kg/m<sup>3</sup>    e)  $4,2 \cdot 10^{-27}$  kg/m<sup>3</sup>

**Prova Individual – Dados e Constantes**

Massa da Terra:  $M_\oplus = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg

Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

1ua =  $1,5 \cdot 10^8$  km

1 pc = 206 265 ua

1'' =  $4,848 \cdot 10^{-6}$  rad

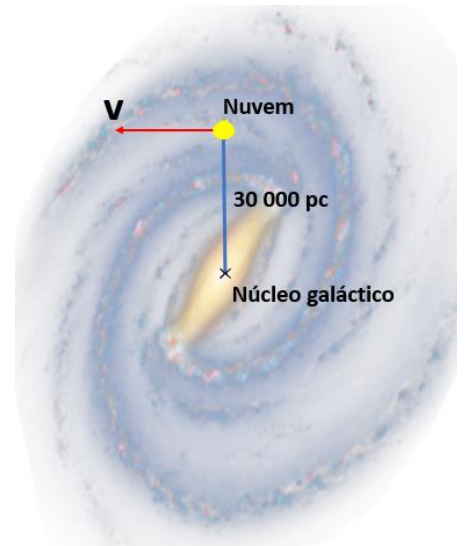
Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Constante de Hubble:  $H_0 = 65$  km.s<sup>-1</sup>.Mpc<sup>-1</sup> =  $2,1 \cdot 10^{-18}$  s<sup>-1</sup>

## Prova Teórica em Grupo

### PROBLEMA I

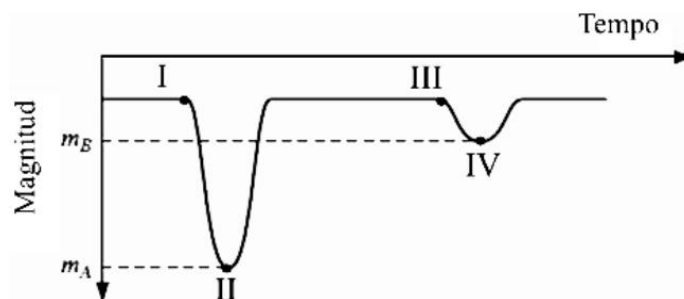
Para uma galáxia espiral, estima-se uma massa visível de  $10^{11}$  massas solares. Com um radiotelescópio se observa a linha de 21 cm, proveniente de uma nuvem de hidrogênio neutro localizada no plano médio da galáxia, a uma distância de 30 000 parsecs do centro da galáxia. Para essa linha se observa um desvio Doppler de  $1,54 \cdot 10^{-4}$  m. Considerando, ainda, que a linha de visada do observador está praticamente contida no plano médio da galáxia, calcule:



- 1) A velocidade de rotação da nuvem de hidrogênio com base no desvio Doppler medido na linha de 21 cm, assumindo que a nuvem seja uma massa pontual que gira em torno do centro galáctico, o qual contém toda a massa visível em uma órbita circular.
- 2) A velocidade de rotação teórica que a nuvem de hidrogênio deveria ter se toda a massa visível da galáxia estivesse concentrada em seu centro.
- 3) Havendo alguma diferença entre a velocidade de rotação teórica calculada em (2) com a medida em (1), qual seria a causa mais provável dessa diferença? Fundamente sua resposta.

### PROBLEMA II

A figura abaixo mostra a curva de luz de uma binária eclipsante tipo Algol cujo plano orbital está na direção da linha de visada. Indicam-se as magnitudes aparentes,  $m_A$  e  $m_B$ , correspondentes aos mínimos primário e secundário da curva de luz, respectivamente. A profundidade de cada mínimo  $\Delta mag$  é definido como a diferença entre a magnitude aparente  $m_A$  ou  $m_B$  e a magnitude aparente total da binária  $m_{tot}$  (quando não há eclipse). Sejam  $T_B$  e  $T_A$  as temperaturas efetivas da componente mais brilhante e da componente mais débil, respectivamente. As duas componentes têm o mesmo raio  $R$ .



- 1) Faça um esquema das posições relativas entre as duas componentes do sistema, com respeito ao observador, correspondentes aos seguintes pontos da curva de luz: (I) - imediatamente antes que se comece a produzir o mínimo primário; (II) - quando se alcança o mínimo primário; (III) - imediatamente antes que se comece o mínimo secundário e (IV) - quando se alcança o mínimo secundário. Indique claramente qual é a estrela A e qual é a B.
- 2) Encontre uma expressão que relacione a profundidade de cada mínimo da curva de luz com a luminosidade total da binária ( $L_{tot}$ ) e a luminosidade individual de cada componente ( $L_A, L_B$ ).
- 3) Sabendo que as temperaturas efetivas das componentes são  $T_B = 12\ 000$  K e  $T_A = 5\ 000$  K, calcule a profundidade  $\Delta mag$  de cada mínimo.

**PROBLEMA III**

Considere a situação em que se distribui, de maneira uniforme, toda a massa da Lua pela superfície terrestre preservando a densidade lunar.

- 1) Em quanto aumentaria o raio desta nova versão do planeta Terra?
- 2) Sendo  $g$  e  $g'$  as acelerações da gravidade na superfície, respectivamente, antes e depois da incorporação da massa da Lua, determine a razão  $g'/g$  da aceleração da gravidade na nova superfície sobre a atual.

**PROBLEMA IV**

O período orbital de um asteroide é exatamente um terço do período orbital de Júpiter, sendo este de 11,87 anos.

- 1) Calcule o semieixo maior  $a$  da órbita do asteroide.
- 2) Sabendo que a órbita do asteroide tem excentricidade  $e = 0,3$  e que é coplanar com a eclíptica, calcule a mínima distância possível que este asteroide pode chegar da Terra, supondo que a órbita da Terra seja circular.

**PROBLEMA V**

A chamada Lei de Hubble é uma relação empírica que permite estimar a distância aos objetos mais remotos do universo. Tal relação estabelece que a velocidade de recessão  $v$  das galáxias distantes é diretamente proporcional a sua distância  $r$  ( $v = H_0 \cdot r$ , sendo  $H_0$  a chamada constante de *Hubble*). Por sua vez, quando  $v \ll c$ , pode se determinar  $v$  a partir do desvio Doppler,  $z$ , das linhas espectrais, dado que  $z = v/c$ , sendo  $c$ , a velocidade da luz no vácuo.

- 1) Supondo  $H_0 = 65 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ , a que distância se encontra uma galáxia com  $z = 0,05$ ?
- 2) Supondo que as velocidades tenham permanecido constantes ao longo do tempo, quanto tempo, em anos terrestres, uma galáxia remota qualquer levaria para chegar na sua distância atual segundo o modelo cosmológico ordinário do *Big Bang*?

**PROBLEMA VI**

Descobre-se um planeta extra-solar orbitando uma estrela a 25 pc de distância do Sol com o telescópio Gemini Sul, de 8,1 m, em  $\lambda = 1,6 \cdot 10^{-6} \text{ m}$ . O exoplaneta está a 5 ua da estrela que possui uma massa de 1,1 massa solar.

- 1) Estime a velocidade orbital do planeta assumindo que sua órbita é circular.
- 2) Estime quantos meses os astrônomos teriam que esperar para observar o planeta mover-se em sua órbita.  
*Nota:* Isto ocorre, aproximadamente, quando o planeta avança uma distância equivalente ao poder de resolução do telescópio.

**PROBLEMA VII**

Faça um esquema das posições relativas da Terra, do Sol e da Lua e os cones de sombra e penumbra durante:

- 1) Um eclipse total do Sol. Indique a zona da Terra de onde se veria o eclipse total, e a zona de onde se veria o eclipse parcial.
- 2) Um eclipse anular do Sol. Indique a zona da Terra de onde se veria o eclipse anular, e a zona de onde se veria o eclipse parcial.

**Prova em Grupo – Dados e Constantes**

Massa do Sol:  $M_{\odot} = 2,0 \cdot 10^{30}$  kg

Massa da Lua:  $M_L = 0,012 M_{\oplus}$

Raio da Terra:  $R_{\oplus} = 6\,371$  km

Raio da Lua:  $R_L = 1\,740$  km

Constante da gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

1 pc = 3,26 al =  $3,086 \cdot 10^{16}$  m

1 ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m

1 ano =  $3,15 \cdot 10^7$  s

1'' =  $4,848 \cdot 10^{-6}$  rad

## VII Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

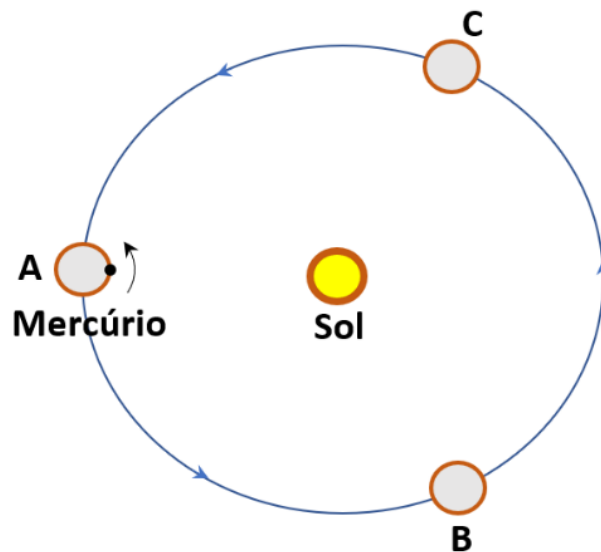
27 de setembro a 04 de outubro de 2015 – Rio de Janeiro



## Prova Teórica Individual

**Questão 1:** Os períodos siderais de translação (88 dias) e de rotação (58 dias) de Mercúrio estão na razão 2/3. Desenhe marcas, ou seja, faça uma bolinha como mostrado na figura abaixo, relacionadas com a posição inicial, assinalada em A, nas três situações disponíveis (A, B e C) separadas a 120° de Mercúrio em sua órbita.

- Após um período completo de translação a partir de A, identifique o ponto como  $r$ .
- Após 1/3 do período de translação a partir de A, identifique o ponto como  $s$ .
- Após 2/3 do período de translação a partir de A, identifique o ponto como  $t$ .



**Questão 2:** O tempo de vida de uma estrela é a razão entre a energia que ela tem disponível e a taxa com que ela gasta essa energia, ou seja, sua luminosidade. A fase mais longa da vida de uma estrela é quando ela está na sequência principal, gerando energia através de fusão termonuclear. No caso do Sol a principal reação transforma 4 núcleos de hidrogênio em um núcleo de hélio, com uma pequena diferença negativa de massa, que se transforma em energia pela equação de Einstein:  $E = mc^2$ .

Suponha que 0,7% da massa que entra na reação termonuclear é transformada em energia e que apenas 10% da massa da estrela contribui para a geração de energia nesta fase.

- Calcule o tempo de vida do Sol na sequência principal.
- Calcule o tempo de vida, na sequência principal, de Spica ( $\alpha$  Vir), sabendo que esta gigante azul tem 11 vezes mais massa do que o Sol, seu raio é 7,6 vezes maior e cerca de 13 000 vezes mais luminosa.
- Com estes dados, estime a temperatura efetiva de Spica.

**Questão 3:** Admita que a observação da estrela Alcione das Plêiades em sua passagem meridiana ocorra, justo à 0h, hora solar média, em um local  $P$  do trópico meridional da Terra, de longitude 45° a Oeste de *Greenwich*. As coordenadas de Alcione, na ocasião da passagem meridiana no local  $P$ , são:  $\alpha = 03h47min27s$ ,  $\delta = 24^{\circ}06'18''$ , [Eq. 2000]. Determine a hora sideral em *Greenwich* no instante e condições definidos anteriormente.

**Questão 4:** Um comprimento de onda específico chamada linha Cálcio K é medido em laboratório e seu valor é de 393,4 nm. Esta linha também é observada da Terra em uma galáxia que está se afastando de nós a uma velocidade de 1 000,0 km.s<sup>-1</sup>. Determine o valor do deslocamento do comprimento de onda observado

**Questão 5:** S Doradus é a estrela mais brilhante da Grande Nuvem de Magalhães, uma hipergigante e uma das estrelas mais luminosas conhecidas. A estrela pertence a uma classe de estrelas variáveis denominada Variável Azul Luminosa ou LBV (de *Luminous Blue Variable*, em inglês). S Doradus exibe lentas e longas variações de brilho num ciclo de 40 anos. Da Terra, S Doradus varia da magnitude aparente 8,6 a 11,7, mas a sua magnitude bolométrica absoluta permanece constante durante esta variação. Determine a razão da sua temperatura efetiva, nos limites de magnitude aparente indicados, e também a razão dos raios fotosféricos durante os extremos deste evento. Considere a estrela, em primeira aproximação, como um corpo negro.

**Questão 6:** O desvio para o vermelho (*redshift*) observado do quasar (QSO) LBQS 0042-2550 é  $z = 0,13$ . Estime sua distância e quanto tempo sua luz demorou a chegar até nós.

*Comentário:* A relação usual de *redshift* é  $z = v/c$ , porém, para  $z > 0,1$ , vale:  $z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1$

**Questão 7:** Os satélites de Júpiter têm o plano de suas órbitas permitindo que diversos fenômenos como trânsitos (TR), ocultações (OC), eclipses (EC) e sombras (SO) dos satélites no planeta possam ser observados da Terra. Apresentamos uma figura esquemática na qual um satélite em sua órbita é representado por pontos de 1 a 8, correspondendo a vários eventos usualmente observáveis telescopicamente da Terra.

*Comentário:* O ângulo entre a direção dos raios solares e a da Terra está fortemente aumentado para facilitar a compreensão da figura.

Defina para cada um dos 8 pontos os 2 itens a seguir:

1. O tipo de fenômeno que pode ocorrer (use as siglas acima),
2. Se se trata de uma imersão (I) ou emersão (E),

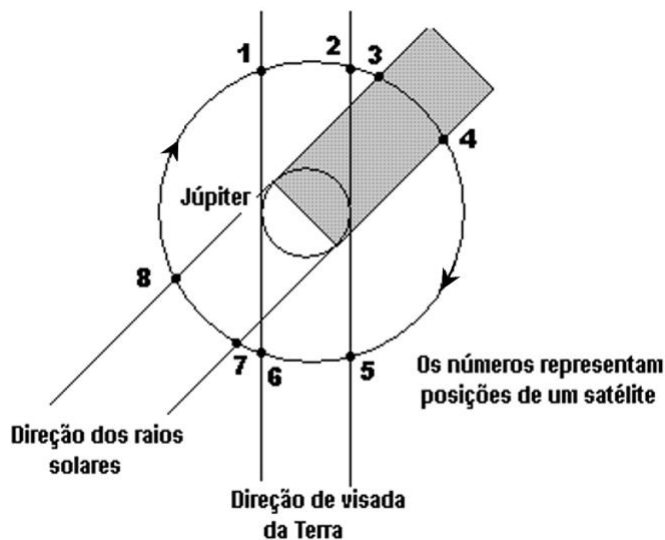


Figura esquemática dos fenômenos dos satélites de Júpiter

- |             |             |             |             |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| 1. ( ), ( ) | 2. ( ), ( ) | 3. ( ), ( ) | 4. ( ), ( ) |
| 5. ( ), ( ) | 6. ( ), ( ) | 7. ( ), ( ) | 8. ( ), ( ) |

**Questão 8:** Em 14 de Julho de 2015 a sonda *New Horizons* fez sua aproximação máxima do planeta-anão Plutão, passando a apenas 12 500 km de sua superfície. Na ocasião, a distância Terra-Plutão era de 31,9 ua e a distância Sol-Plutão era 33 ua.

- a) Quanto tempo levou para o sinal emitido pela sonda chegar à Terra?
- b) As imagens da câmera LORRI carregam 2,5 Mbits de informação, e são transmitidas a uma taxa máxima de 2kbit/segundo. Estime quantas imagens podem ser enviadas para a Terra em um mês. Considere que um mês tem 30dias, e que 1 kbit = 2<sup>10</sup> bit e 1 Mbit = 2<sup>20</sup> bit.
- c) Na data da aproximação máxima da *New Horizons*, quantas vezes o fluxo de luz solar em Plutão era menor que o na Terra? Qual a magnitude aparente do Sol visto de Plutão?
- d) Caronte é o maior satélite de Plutão; na verdade é tão grande (cerca de metade do diâmetro de Plutão) que em 2006 a IAU cogitou definir o sistema Plutão-Caronte como um planeta duplo. A distância entre os dois corpos é  $d_{PC} = 19\ 570$  km. Determine a distância, em relação a superfície de Plutão, que se encontra a posição do Centro de Massa do sistema Plutão-Caronte. Encontre também e o período orbital de Caronte.

**Questão 9:** Desde o lançamento do primeiro satélite artificial pelos soviéticos (*Sputnik*, 1957) a espécie humana já colocou em órbita cerca de 7 000 satélites. Desses, cerca de 1 300 orbitam sobre as nossas cabeças com diversos objetivos. O Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais (INPE) e a China desenvolveram os CBERS, uma série de satélites de sensoriamento remoto utilizados para estudos da vegetação e recursos hídricos. Os CBERS são lançados por foguetes Longa Marcha até uma altitude de 800 km. Calcule o período orbital do satélite e estime quantas voltas ele dá em torno Terra em 24 horas.

**Questão 10:** Além do vetor velocidade do satélite possuir magnitude, direção e sentido necessários para mantê-lo na órbita desejada, o próprio satélite precisa estar orientado em relação à Terra. Se o satélite é de sensoriamento remoto, suas câmeras devem estar apontadas em direção à superfície terrestre. O satélite *CBERS* orbita a Terra em órbita polar. Se considerarmos que uma vez em órbita o satélite possui somente o movimento de rotação em torno da Terra, ocorrerá o fenômeno ilustrado na figura ao lado, qual seja, no ponto A a câmera estará direcionada à superfície terrestre e, no ponto B, da mesma órbita, a câmera apontará para o espaço sideral, implicando na inutilidade dela para efeito de imageamento da Terra. A solução para este problema é fazer com que o satélite gire em torno do seu próprio eixo, perpendicular à sua órbita. Assumindo que o satélite seja colocado em órbita na posição representada em A na figura ao lado, e o seu período é idêntico ao calculado na questão anterior, qual deverá ser sua velocidade angular para que sua câmera imageadora esteja sempre apontada para a superfície terrestre? A resposta deve ser dada em rpm (rotações por minuto).



#### Prova Individual – Dados e Constantes

Massa do Sol:  $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$  kg

Massa da Terra:  $M_{\oplus} = 5,97 \cdot 10^{24}$  kg

Massa de Caronte:  $M_C = 2,54 \cdot 10^{-4} \cdot M_{\oplus}$

Massa de Plutão:  $M_P = 2,2 \cdot 10^{-3} \cdot M_{\oplus}$

Raio da Terra:  $R_{\oplus} = 6\,371$  km

Raio de Plutão:  $R_P = 1\,186$  km

Luminosidade do Sol:  $L_{\odot} = 3,9 \cdot 10^{26}$  W

Temperatura do Sol:  $T_{\odot} = 5\,800$  K

Magnitude aparente do Sol =  $-26,8$

Velocidade da luz:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

Constante de Gravitação Universal:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Constante de Hubble:  $H_0 = 67,8$  km.s<sup>-1</sup>.Mpc<sup>-1</sup>

1 pc = 3,26 al =  $3,1 \cdot 10^{16}$  m

1 ua =  $1,496 \cdot 10^8$  km

## Prova Teórica em Grupo

**Questão 1:** Entre as estrelas da tabela a seguir (equinócio 2 000), escreva qual é, ou quais são:

- As que pertencem ao hemisfério Sul celeste;
- As que nunca podem ser vistas em Santiago ( $\phi = 33^\circ \text{ S}$ );
- As que são circumpolares visíveis em Montevidéu ( $\phi = 35^\circ \text{ S}$ );
- As que fazem sua passagem meridiana mais próxima do zênite na Cidade do México ( $\phi = 19^\circ \text{ N}$ );
- Aa que fazem sua passagem meridiana em 21 de março no horário mais próximo das 2h 30min (hora local) no Rio de Janeiro ( $\phi = 23^\circ \text{ S}$ ;  $\lambda = 43^\circ \text{ W}$ ).

Estrela	Ascensão Reta (AR)	Declinação ( $\delta$ )
Peacock ( $\alpha$ -Pav)	20h 25min 39s	$- 56^\circ 44' 07,4''$
Alderamin ( $\alpha$ -Cep)	21h 18min 34,9s	$+ 62^\circ 35' 06,4''$
Algeiba ( $\gamma$ -Leo)	10h 19min 58,7s	$+ 19^\circ 50' 25,9''$
Rigel ( $\beta$ -Ori)	5h 14min 32,3s	$- 08^\circ 12' 05,9''$
Polaris ( $\alpha$ -UMi)	2h 31min 50,2s	$+ 89^\circ 15' 51,3''$
Regulus ( $\alpha$ -Leo)	10h 08min 22s	$+ 11^\circ 58' 02,8''$
Arcturus ( $\alpha$ -Boo)	14h 15min 38,6s	$+ 19^\circ 10' 22,1''$
Pollux ( $\beta$ -Gem)	7h 45min 18,2s	$+ 28^\circ 01' 31,7''$
Achernar ( $\alpha$ -Eri)	1h 37min 43s	$- 57^\circ 14' 13,3''$

**Questão 2:** O Sol tem um diâmetro médio de  $1,392 \cdot 10^6$  km enquanto que a Lua tem um diâmetro médio de 3 475 km. A distância do Sol à Terra varia de  $1,471 \cdot 10^8$  km até  $1,521 \cdot 10^8$  km, enquanto que a Lua pode estar desde 363 104 km até 405 696 km. Desta forma os eclipses do Sol podem ser totais ou anulares dependendo das distâncias dos dois astros na ocasião do eclipse. Naturalmente, isto ocorre em um ponto da Terra que se alinha com o centro dos dois astros.

- Admitindo que os parâmetros geométricos do eclipse lunar de 27 de setembro de 2015 (Lua Cheia) fossem os mesmos de um eclipse solar (Lua Nova), mostre que tal eclipse solar seria total. Admita ainda que a distância da Terra ao Sol, neste dia, seja de  $1,496 \cdot 10^8$  km, e que a Lua está no perigeu.
- Mostre que um eclipse solar é anular quando a Lua estiver em configuração de distância máxima, mesmo que o Sol também esteja.

**Questão 3:** As marés da massa líquida na Terra resultam astronomicamente da ação gravitacional diferencial do Sol e da Lua sobre a distribuição dessa massa, constituída principalmente por mares e oceanos. Predomina a ação gravitacional lunar em relação à solar na proporção aproximada de 2 para 1. Para um dado local as marés mais altas ocorrem quando a Lua passa pelo meridiano, sendo máximas em luas novas e cheias com a Lua no perigeu e a Terra no periélio; marés altas de menor altura comparativamente ocorrem nas quadraturas lunares. A translação da Lua combinada com a rotação da Terra, esta mais rápida, gera uma defasagem das marés em relação ao período de rotação terrestre, sendo necessário um tempo adicional da rotação da Terra (da ordem média de 52 min) para que a Lua atinja um dado meridiano numa segunda passagem consecutiva.

- Um observador à beira mar vê a Lua Cheia passando no meridiano por ocasião de uma maré alta num instante (médio)  $t_0$ . Estime o tempo (hora aproximada) em que deverão ocorrer as duas próximas marés altas no lugar em relação a  $t_0$ .

b) A seguir, fornecemos uma tabela de valores máximos de preamares relativos a um nível médio entre marés altas e baixas (arbitrado zero) para um porto marítimo, registrados durante vários anos.

Data (ano)	Altura da maré máxima (metros)
1952,6	3,34
1957,0	3,38
1961,8	3,40
1966,0	3,35
1970,0	3,35
1975,0	3,38
1979,2	3,40
1988,6	3,37

Com os dados da tabela, construa um gráfico que relaciona as alturas das marés máximas com as respectivas datas. Utilize o papel quadriculado fornecido junto com a prova. Use escalas adequadas.

c) Os valores das alturas das marés máximas apresentam uma variação periódica causada pela precessão da órbita da Lua. Com base no gráfico do item (b), determine o intervalo de tempo da precessão lunar.

**Questão 4:** Corpos do Sistema Solar se distinguem de outros astros de várias formas. Em geral, não têm fontes internas de energia, e só são detectáveis por conta da radiação solar que eles refletem ou reemitem termicamente. Uma consequência deste fato é que a energia proveniente do Sol é também responsável em grande parte pelas temperaturas destes corpos. Para corpos sem atmosfera e sem fontes internas de calor a maior temperatura possível é obtida assumindo-se o equilíbrio radiativo entre a superfície do corpo e a radiação solar incidente. Se supomos que não há condução de calor para o interior do corpo, temos:

$$\varepsilon \sigma T_{SS}^4 = \frac{S_{\odot}}{R^2} (1 - A)$$

Nesta equação, temos:

$T_{SS}$ : temperatura do ponto subsolar, ponto na superfície do corpo que seria interceptado por uma linha imaginária ligando o centro do corpo ao centro do Sol;

$\sigma$ : constante de Stefan-Boltzmann;

$\varepsilon$ : emissividade, que é a fração da radiação térmica que é de fato emitida pelo corpo e depende (de maneira fraca) da sua composição. Para um corpo emissor ideal, chamado "corpo negro", teríamos  $\varepsilon = 1$ ; valores de  $\varepsilon \approx 0,9$  em geral são uma boa aproximação para corpos do Sistema Solar;

$S_{\odot}$ : constante solar, que é a quantidade total de energia emitida por toda a superfície do Sol em um segundo;

$R$ : a distância entre o corpo e o Sol; e

$A$ : o albedo hemisférico do corpo, que mede a fração da energia incidente que é refletida pelo corpo e depende de sua composição.

Com isto, a equação estabelece que a quantidade de energia térmica emitida em um segundo por unidade de área do corpo ( $\varepsilon \sigma T_{SS}^4$ ) em um dado ponto de sua superfície tem que ser igual à quantidade de energia por unidade de área que incide sobre este ponto ( $\frac{S_{\odot}}{R^2}$ ) e é por ele absorvida ( $1 - A$ ). Logo, a equação acima na prática considera que há conservação de energia.

A partir da temperatura, o fluxo térmico total de um corpo pode ser escrito como

$$\frac{\pi R_{eff}^2}{2\Delta^2} (\varepsilon \sigma T_{SS}^4)$$

onde  $\Delta$  é a distância do corpo ao observador e  $\mathcal{R}_{eff}$  é o raio efetivo do corpo.

Definindo uma constante  $C = \frac{S_{\odot}}{\sigma} = 2,411 \times 10^{10} K^4 (ua)^2$ , onde  $K$  é temperatura Kelvin e  $ua$  é uma unidade astronômica, que corresponde à distância média da Terra ao Sol, considerando uma emissividade constante  $\varepsilon = 0,9$ , os dados da tabela com as distâncias médias ao Sol e albedos hemisféricos de diversos corpos do Sistema Solar:

Corpo	R (ua)	A
Mercúrio	0,4	0,07
Lua	1,0	0,11
Phobos (satélite de Marte)	1,5	0,02
Vesta	2,2	0,18
Europa (satélite de Júpiter)	5,2	0,96
Enceladus (satélite de Saturno)	9,5	0,99

a) Calcule as temperaturas subsolar para os objetos da tabela. Calcule também as temperaturas que estes objetos teriam se todos tivessem o albedo hemisférico de Vesta e construa um gráfico com estes valores contra a distância heliocêntrica.

b) O que aconteceria com as temperaturas calculadas se a condução de calor na superfície do corpo fosse importante? Por quê?

c) Considerando que no vácuo o gelo de água sublima (passa do estado sólido para o estado gasoso) a uma temperatura de 150 K e que o albedo hemisférico de gelo de água é  $A = 0,9$ . A partir de qual distância ao Sol é possível encontrar gelo de água na superfície de um corpo sem atmosfera?

**Questão 5:** Em um artigo publicado em 1903 o russo *Tsiolkovsky* (1857-1935) apresentou a famosa equação do foguete:

$$\Delta v = I_{SP} \cdot g \cdot \ln \left( \frac{m_i}{m_f} \right)$$

Nela  $\Delta v$  representa o ganho teórico de velocidade decorrente da queima de cada estágio.  $I_{SP}$  é o impulso específico do motor-foguete, que basicamente depende do propelente utilizado.  $g$  é a aceleração da gravidade,  $m_i$  é a massa inicial do foguete e  $m_f$  a massa final, obtida subtraindo-se da massa inicial do foguete a massa de propelente consumida naquele estágio. A tabela abaixo fornece o ganho de velocidade obtido pela queima de cada um dos quatro estágios do Veículo Lançador de Satélites (VLS-1) brasileiro.

Estágio	$M_{propelente}$ [kg]	$M_{estrutura}$ [kg]	$\Delta v$ [m/s]
1º	29 000	5 500	2 169
2º	7 250	1 375	1 650
3º	4 544	1 183	2 704
4º	808	240	3 042
TOTAL	41 602	8 298	9 565

Os valores de  $\Delta v$  para cada estágio foram calculados considerando  $I_{SP} = 350$  s e  $g = 10$  m/s<sup>2</sup>. Foi ainda considerado que a massa do satélite era de 100 kg.

A partir dos dados apresentados na tabela, estime:

a) a relação entre a massa de propelente e a massa total do foguete na decolagem.

b) a relação entre a massa do satélite e a massa total do foguete na decolagem. Expresse os seus resultados em termos percentuais.

c) A equação de Tsiolkovsky não considera os efeitos da gravidade e do atrito do foguete com a atmosfera terrestre. Ambos os efeitos diminuem o ganho de velocidade teórico. Consequentemente, o valor de  $\Delta v$  real do VLS-1 é 80% daquele obtido a partir da equação do foguete. Baseado neste fato, expresse qual a velocidade final do VLS-1 após a queima dos seus quatro estágios.

d) Muito embora o propelente sólido seja utilizado em quase todos os veículos lançadores de satélites, é costume utilizar propelente líquido em pelo menos um estágio, visto que eles permitem uma maior precisão na colocação do satélite em órbita. Pensando nisso, um engenheiro teve a ideia de substituir o terceiro e quarto estágios do VLS-1 por um único motor movido a propelente líquido. Os valores de  $\Delta v_1$  e  $\Delta v_2$  precisaram ser recalculados porque a massa do terceiro estágio no novo foguete proposto é diferente, conforme mostrado na tabela abaixo.

Estágio	$M_{\text{propelente}} \text{ [kg]}$	$M_{\text{estrutura}} \text{ [kg]}$	$\Delta v \text{ [m/s]}$
1°	29 000	5 500	2 402
2°	7 250	1 375	2 176
3°	3 000	750	$\Delta v_3$
TOTAL	39 250	7 625	$\Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3$

Lembrando que o impulso específico do motor a propelente líquido é de  $I_{SP} = 350 \text{ s}$  e que a massa do satélite continua igual a 100 kg, utilize a equação do foguete para obter  $\Delta v_3$ .

e) Baseado no  $\Delta v_3$  obtido acima, calcule  $\Delta v_{\text{total}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3$  e compare-o àquele obtido para o caso dos quatro propulsores sólidos do VLS-1. Vale a pena substituir o terceiro e quarto estágio sólidos por um estágio líquido?

## VIII Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

03 a 08 de outubro de 2016 – Córdoba – Argentina

### Prova Teórica Individual

#### 1) Estimativas:

O cálculo estimado é uma necessidade em Astronomia, sobretudo quando se manipula informações onde o cálculo exato é menos importante do que se ter uma ideia das grandezas associadas para poder dar apenas um sim ou não como resposta. Realize estimativas a partir das situações sugeridas e justifique suas respostas.



- Se, agora, você começasse uma caminhada de Córdoba até Porto Alegre (distância aproximada de 1 400 km), conseguiria chegar antes do final do ano? Suponha que a velocidade média de caminhada de um ser humano está entre 4 e 6 km/h. Tenha em conta que, como todo ser humano, você necessita de 10 a 12 horas de descanso e outras demandas por dia. Para simplificar, pense que você está acompanhado de um jumento que carrega todas as coisas que você necessita.
- Atualmente a sonda *New Horizons*, da NASA, está deixando Plutão. Sua passagem pelo planeta anão foi em 14 de julho de 2015, a uma velocidade de aproximadamente 14 km/s. Se a sonda seguir em linha reta até Próxima Centauri (coisa que não está sendo feita, já que seu destino é o cinturão de Kuiper), que possui uma paralaxe de 0,8", e chegar com capacidade para transmitir imagens para a Terra; quem poderia ver as imagens de Próxima B, o exoplaneta mais próximo da Terra? Você? Seus filhos? Seus netos?
- O projeto Starshot, idealizado por Stephen Hawking e outros, baseia-se no desenho e construção de uma sonda miniaturizada que, impulsionada em órbita por velas superleves, pode ser acelerada com raios laser a partir da Terra. Desta forma, prevê-se que a sonda alcance velocidades da ordem de uns 20% da velocidade da luz. Se já dispuséssemos de tecnologia adequada para este projeto, seria possível você chegar a ver as imagens tomadas pela sonda do exoplaneta Próxima B?

#### 2) Calibragem da relação Período-Luminosidade das estrelas variáveis Cefeidas:

As Cefeidas são uma classe de estrelas variáveis que, devido ao movimento de contração, aumentam a quantidade de reações termonucleares as quais esquentam sua atmosfera produzindo um movimento de expansão. A variação de seu raio corresponde a uma variação na quantidade de energia emitida pela estrela sendo ambas variações periódicas. Desta maneira, as Cefeidas apresentam uma relação linear entre o seu período de pulsação e a máxima luminosidade alcançada. Essa descoberta foi realizada pela astrônoma Henrietta Leavitt, em 1908.

Esse tipo de estrela recebe esse nome devido a estrela Delta Cephei, que é o referencial da espécie. Para utilizar a relação e determinar distâncias, é necessário conhecer ao menos as distâncias de algumas estrelas. No caso de Delta Cephei, que pertence a um aglomerado com várias estrelas variáveis, basta determinar a paralaxe do aglomerado para calibrar a relação.

O objetivo desta questão é estudar a relação período-luminosidade das estrelas Cefeidas. Vamos analisar, a partir dos dados da tabela, a luminosidade e o período de cinco estrelas variáveis de um aglomerado com paralaxe de 0,057".

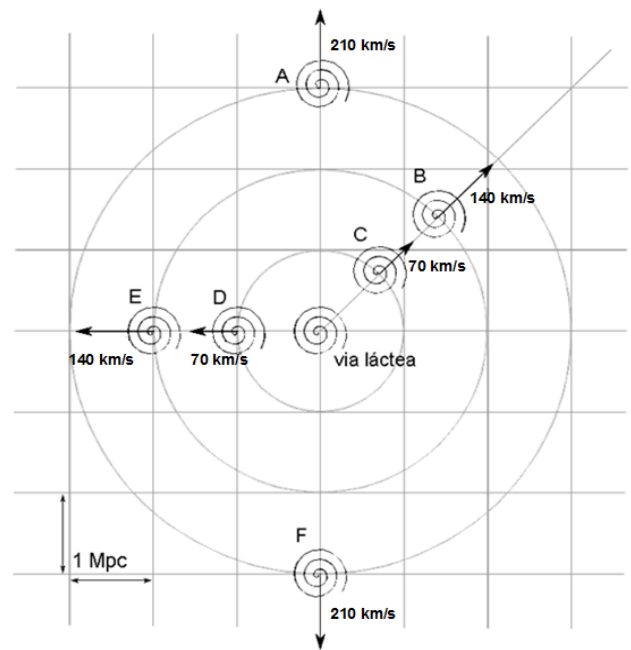
Estrela	log P (dias)	Fluxo ( $10^{-5} \text{ erg.s}^{-1}.\text{cm}^{-2}$ )	Luminosidade ( $L_{\odot}$ )
Variável 1	0,5	1,5	
Variável 2	1	2,2	
Variável 3	1,5	2,8	
Variável 4	2	3,1	
Variável 5	2,5	3,8	

- Encontre a distância, em centímetros, ao aglomerado estelar.
- Complete a tabela com os valores correspondentes a luminosidade, em luminosidades solares, das cinco estrelas variáveis apresentadas.
- Construa o gráfico luminosidade *versus* logaritmo do período, ou seja,  $L(L_{\odot}) \times \log P$ , com os dados encontrados. E encontre a equação linear que se ajusta na dispersão.
- Considere uma estrela variável Cefeida cujo período é 178 dias em uma galáxia distante. O fluxo medido para ela é de apenas  $1,14 \cdot 10^{-15} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ . Estime a distância, em parsec, dessa galáxia utilizando a relação encontrada em no item (c).
- Estime a magnitude absoluta e aparente da estrela variável do item (d).

### 3) Lei de Hubble:

A tabela abaixo mostra a distância e a velocidade de 6 galáxias quaisquer, indicadas de A a F, em relação à Via Láctea.

Galáxia	Distância (Mpc)	Velocidade (km/s)
A	3	210
B	2	140
C	1	70
D	1	70
E	2	140
F	3	210



- Com uma tabela similar, qualitativamente, Edwin Hubble determinou que as galáxias observáveis pareciam se afastar de nós a uma velocidade proporcional à sua distância. Essa lei passou a ser conhecida como Lei de Hubble. A partir dos dados da tabela, determine o valor da constante de proporcionalidade dessa lei.
- Suponha que as galáxias se encontrem distribuídas segundo a figura acima à direita. Complete a tabela abaixo com os valores que um possível astrônomo extraterrestre (ET) vivendo na galáxia D conseguiria medindo as distâncias e velocidades das demais galáxias.

Galáxia	Distância (Mpc)	Velocidade (km/s)
A		
B		
C		
Via Láctea	1	70
E		
F		

- Deduza a “Lei do ET”, ou seja, que constante observaria esse astrônomo da galáxia D.
- Que diferenças se observam entre a lei descoberta pelo ET e por Hubble?

### 4) Observação de Marte:

Marte é o segundo planeta mais próximo da Terra. Neste problema vamos estudar quão fácil ou difícil é observá-lo com um telescópio situado na Terra.

- Faça um esquema de Marte em oposição a Terra, em relação ao Sol, num instante arbitrário.

- b) Considerando as órbitas circulares, determine a distância máxima e mínima, em metros, entre esses dois planetas.
- c) Encontre o diâmetro angular, em segundos de arco, com que se vê Marte por um observador na Terra em ambas situações.
- d) Para se ter uma ideia intuitiva do item anterior, determine a que distância do olho de um observador deve-se colocar uma moeda de 1 peso argentino (2 cm de diâmetro) para se obter mesmo diâmetro angular máximo observado de Marte.
- e) A que hora local, aproximadamente, ocorrerá a culminação superior de Marte quando se encontra na máxima e na mínima aproximação com a Terra? Justifique sua resposta.
- f) O maior *cânion* do Sistema Solar é chamado de Valles Marineris, em Marte. Este *cânion* se estende por 3 000 km de extensão, 600 km de largura e tendo mais de 8 km de profundidade. Qual deve ser o diâmetro mínimo de um telescópio para que se possa distinguir sempre a largura deste *cânion* nos instantes de máxima e mínima aproximação. Considere como comprimento de onda para a observação, o comprimento médio da faixa visível  $\lambda = 550$  nm. Considere que, para resolver um objeto, a resolução deve ser de pelo menos  $1/3$  do diâmetro angular do objeto.
- g) Calcule a duração completa da ocultação de Marte pela Terra vista do Sol. Considere como ocultação o momento do primeiro ao último contato dos dois corpos e que as órbitas são coplanares.

### 5) Coordenadas e Tempo:

- a) Suponha que a culminação superior de uma estrela se dê às 3h da manhã de tempo civil em 2 de março. Qual será o ângulo horário da mesma estrela em 15 de junho a mesma hora?
- b) As coordenadas equatoriais da estrela Próxima Centauri são: ascensão reta:  $14^{\circ} 29,7'$ ; declinação:  $- 62^{\circ} 41'$ . A partir destes dados, determine para quais observadores na Terra (faixa de latitude) esta estrela é circumpolar visível.
- c) Em qual latitude nenhuma estrela é circumpolar?
- d) Se um observador se encontra sobre o círculo polar antártico, em que época do ano o movimento diurno do Sol será circumpolar?

#### Prova Individual – Dados e Constantes

Raio da Terra:  $R_{\oplus} = 6\,371$  km

Raio de Marte:  $R = 3\,397$  km

Distância Marte-Sol: 1,52 ua

Luminosidade do Sol:  $L_{\odot} = 3,83 \cdot 10^{33}$  erg/s

Magnitude absoluta do Sol:  $M_{\odot} = 4,83$

Velocidade da luz:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

1 pc = 3,26 al =  $3,1 \cdot 10^{16}$  m

1 ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m

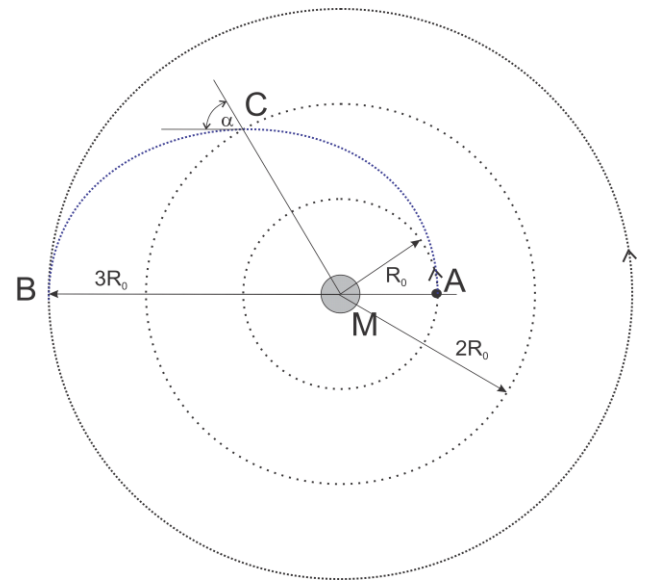
$1'' = 4,848 \cdot 10^{-6}$  rad

1 ano =  $3,15 \cdot 10^7$  s

## Prova Teórica em Grupo

### 1) Transferência orbital e controle:

Um satélite artificial encontra-se em uma órbita circular de raio  $R_0$  ao redor de um planeta de massa  $M$  como mostra a figura ao lado. Mediante a aplicação de um impulso, na mesma direção do movimento no ponto A, deseja-se transferir um satélite ao ponto B, localizado a  $3R_0$  de distância de  $M$ , de maneira tal que este ponto seja o apoastro da órbita elíptica de transferência. Para saber se a manobra é corretamente realizada, os engenheiros tomam como referência o valor do ângulo  $\alpha$  entre o vetor velocidade e a direção radial em um ponto intermediário C, que se encontra à distância  $2R_0$ . A partir da situação descrita, responda:



- Qual o valor do ângulo  $\alpha$  caso a manobra se faça corretamente?
- Quanto tempo que levará o satélite para percorrer a trajetória descrita de A até B? Expresse o resultado em função de  $M$ ,  $R_0$  e da constante de gravitacional  $G$ .

### 2) Climatologia Espacial:

Ejeções de massa coronal, CME, da sigla em inglês: *Coronal Mass Ejection*; são grandes erupções de gás ionizado a altas temperaturas, provenientes da coroa solar. O gás expelido constitui parte do vento solar e, quando atinge o campo magnético terrestre, pode causar tempestades, prejudicando os meios de comunicações e estações elétricas. Quando uma ejeção dirige diretamente para a Terra, a onda de choque das partículas energéticas solares causa uma tempestade geomagnética que perturba a magnetosfera terrestre, comprimindo suas linhas de campo no lado voltado para o Sol e expandindo do outro lado, produzindo uma cauda magnética. Quando a magnetosfera se reconecta em sua região expandida, libera energia na escala de terawatts, que é direcionada diretamente para as camadas mais altas da atmosfera. As partículas energéticas solares também provocam auroras polares nas regiões próximas aos polos magnéticos terrestres. As tempestades geomagnéticas podem interromper as transmissões de rádio e podem causar danos em satélites e centrais elétricas, possivelmente resultando em blecautes.

Em 2004, uma equipe de astrônomos norte-americanos observou a relação entre a amplitude da perturbação  $P$ , em nanotesla [nT], produzida pela CME, e a magnitude da componente do campo magnético da Terra  $B_z$ , em nanotesla [nT], perpendicular ao plano do Sistema Solar no momento da tempestade. Os autores expressaram essa relação mediante a seguinte fórmula (Yurchyshyn et al, 2004):

$$(1) \quad P = -2,846 + 6,54.B_z - 0,118.B_z^2 - 0,002.B_z^3$$

Também em 2004, uma equipe de astrônomos brasileiros, determinou uma relação entre a velocidade de propagação da CME,  $V$ , em km/s, e a magnitude da perturbação  $P$ , novamente em nano Tesla [nT]:

$$(2) \quad P = 0,00052.(0,22.V + 340)^2$$

No ano seguinte (2005), uma equipe de astrônomos norte-americanos, estudando novos dados sobre as CME's, encontrou uma relação entre a velocidade de propagação  $V$ , em km/s, e o tempo  $T$ , em dias, que a tempestade leva para percorrer a distância Terra-Sol:

$$(3) \quad T = -0,0042.V + 5,14$$

Os mesmos autores encontraram também uma relação entre a velocidade de propagação  $V$ , em km/s, da CME e o campo magnético terrestre máximo  $B_{máx}$ , em nanotesla [nT]:

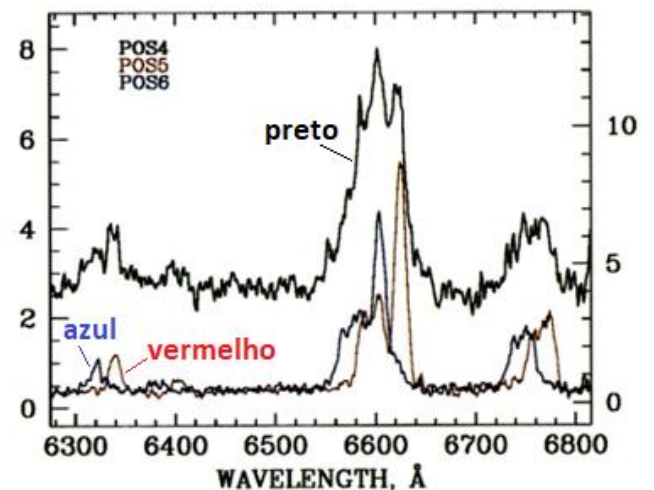
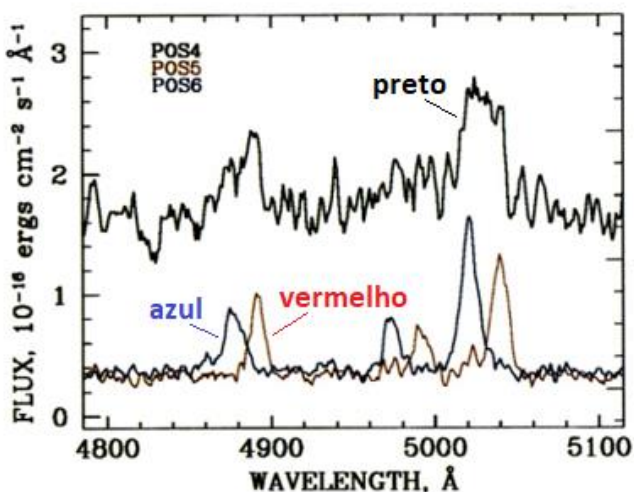
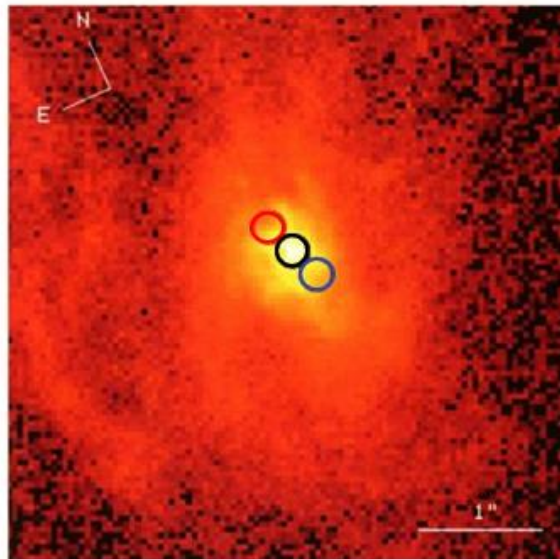
$$(4) B_{m\acute{a}x} = 0,047V + 0,644$$

- Encontre a equação quadrática que forneça o valor da amplitude da perturbação  $P$  em função do tempo  $T$ .
- Assumindo a relação  $B_z = B_{m\acute{a}x}/\sqrt{2}$ , encontre  $P$  em função da velocidade  $V$  da CME.
- Sabendo que a velocidade da Ejeção Coronal de Massa varia entre 300 e 800 km/s, qual o tempo máximo que dispomos para se dar um alerta de tempestade solar no melhor e pior caso?

A tempestade solar de 1859, conhecida também como Evento Carrington, por conta da primeira observação realizada pelo astrônomo inglês Richard Carrington, é considerada a tempestade solar mais potente registrada na a história. No ano de 1859, houve uma grande Ejeção Coronal de Massa. A partir do dia 28 de agosto daquele ano, observaram-se auroras boreais que chegavam até o Norte da Colômbia. No pico de intensidade, falharam os sistemas telegráficos em toda Europa e América do Norte produzindo curtos circuitos que provocaram numerosos incêndios. Em um trabalho realizado em 2006, físicos norte-americanos reanalisaram informações históricas do evento, chegando à conclusão que a amplitude da perturbação atingiu  $P = 850$  nT.

- Utilizando os resultados dos itens anteriores, estime o tempo  $T$  que a CME de 1859 levou para percorrer a distância Terra-Sol.
- Estime a velocidade de ejeção da CME de 1859.

### 3) Buraco Negro Supermassivo em M87:

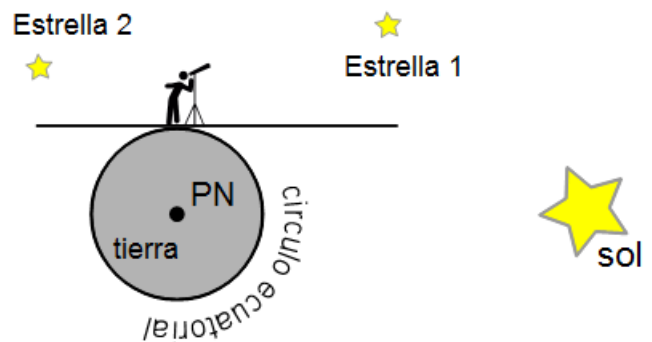


Um dos exemplos clássicos de um buraco negro supermassivo é o que encontramos no núcleo da galáxia M87 no aglomerado de Virgem. Em 1994, uma equipe de astrônomos norte-americanos apresentou a evidência de um disco de acreção ao redor desse buraco negro. A imagem acima mostra observações fotométricas e espectroscópicas da

região central de M87 feitas com o telescópio espacial Hubble. O círculo preto, vermelho e azul, na imagem, indicam diferentes regiões, respectivamente denominadas por *POS4*, *POS5* e *POS6*, para as quais se tomaram espectros.

Abaixo, os autores nos mostram os espectros de cada região utilizando as mesmas cores. Como se pode ver, existe um deslocamento entre as linhas de emissão de *POS5* e *POS6*. Este deslocamento é interpretado como a rotação do disco de acreção próximo a M87, sendo *POS6* a parte do disco que se move na direção do observador e *POS5* a parte que se afasta.

- Por que razão os autores afirmam isso? Como podemos saber o sentido de rotação?
- Considerando que M87 está a 16 Mpc de distância da Terra, estime, respeitando a escala da imagem, a distância angular, em Mpc, entre as regiões *POS5* e *POS6*.
- A partir dos espectros, estime a diferença, em comprimento de onda, entre as linhas espectrais de *POS5* e *POS6*. Justifique sua resposta.
- Calcule a velocidade de rotação do disco de acreção. Assuma que ambas posições, *POS5* e *POS6*, têm a mesma velocidade, porém em sentidos opostos, em relação ao centro *POS4* considerado em repouso.
- Considerando que o movimento seja circular e uniforme, calcule a massa do objeto central a *POS5* e *POS6*. Expresse o resultado em kg e em massas solares.
- Se, admitirmos a possibilidade de que o disco esteja inclinado em relação à linha de visada, por exemplo de  $35^\circ$ , estamos errando para mais ou para menos a massa estimada no item anterior?
- Se considerarmos que o objeto central é formado por estrelas semelhantes ao Sol, com que magnitude aparente deveria se observar essa região?



#### 4) Medição da massa do Sol através do Efeito Doppler:

Suponha que um observador esteja sobre o Equador terrestre e dispõe de um telescópio com espectrógrafo instalado. Este observador, mede então, as linhas espectrais de várias estrelas em diferentes alturas, imediatamente após o pôr do Sol, e encontra diferentes desvios Doppler em função das alturas dos astros. Percebe que os desvios para o vermelho são observados em estrelas próximas ao horizonte Oeste, já os desvios para o azul são observados em estrelas próximas ao horizonte Leste.

- A que se deve os diferentes desvios ao se observar em diferentes direções?
- Quais movimentos do observador geram os desvios Doppler observados?
- Indique a direção e sentido desses movimentos na figura ao lado, na posição do observador.

Considere as medições de duas estrelas com diferentes azimutes e alturas tomadas na linha  $H\alpha$ , com comprimento de onda no repouso igual a  $\lambda_0 = 656,3$  nm. Adote a convenção do azimute *NESO*.

Estrela	Azimute	Altura	Desvio $\Delta\lambda$ (nm)
1	$270^\circ$	$35^\circ 10'$	+ 0,038 40
2	$90^\circ$	$55^\circ 07'$	+ 0,052 91

- Escreva as fórmulas do desvio Doppler de ambas estrelas utilizando a altura do astro e considerando como incógnitas as velocidades de rotação e translação da Terra na localização do telescópio.
- Resolva o sistema e encontre as velocidades de rotação e translação da Terra.
- Encontre, a partir das velocidades do item anterior, o raio da Terra e a distância ao Sol. Utilize o dia e o ano siderais como medida de períodos de ambos os movimentos. Expresse o resultado em km.
- Estime a massa do Sol a partir da distância e velocidade da Terra.

**Prova em Grupo – Dados e Constantes**

Magnitude absoluta do Sol:  $M_{\odot} = 4,83$

Massa solar:  $1,99 \cdot 10^{30}$  kg

Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

Constante de gravitação universal:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

1 pc = 3,26 al =  $3,1 \cdot 10^{16}$  m

1 ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m

1'' =  $4,848 \cdot 10^{-6}$  rad

1 dia sideral = 23h 56min 4s =  $8,616 \cdot 10^3$  s

1 ano sideral = 365 dias 6h 9min 10s =  $3,156 \cdot 10^7$  s

**IX Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
08 a 13 de outubro de 2017 – Antofagasta – Chile



IX OLIMPIADA LATINOAMERICANA  
DE ASTRONOMÍA Y ASTRONÁUTICA  
ANTOFAGASTA, CHILE, OCTUBRE 2017

**Prova Teórica Individual**

**Pergunta 1:**

- (a) Hiparco mediu, em 141 a.C., a posição de  $\alpha$  Virginis (Spica) encontrando uma longitude eclíptica de  $174^{\circ}07'30''$ . Maskeline, em 1802 d.C., encontrou um valor correspondente de  $201^{\circ}04'41''$  para a mesma estrela. Com base nessas medidas, estime o deslocamento anual do ponto vernal.
- (b) Suponha que as 12 constelações do zodíaco se projetem sobre a eclíptica de modo uniforme. Estime quantos graus se deslocou a constelação de Leão desde a época de Hiparco até o ano de 2017.

**Pergunta 2:**

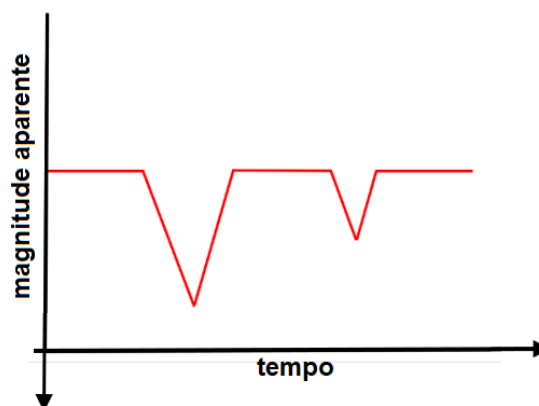
Um certo observador A determinou as magnitudes aparentes de cada estrela que compõem o aglomerado estelar Olympus 010101 obtendo os seguintes valores: 5,09; 3,62; 2,90; 3,87; 4,30; 4,18 e 3,70. Dois dias depois, um segundo observador B foi incapaz de separar as estrelas deste mesmo aglomerado, vendo-o como se fosse uma única estrela. Considerando que a distância entre o aglomerado e os observadores são iguais, e que em nenhum momento as estrelas se eclipsaram, determine a magnitude aparente do aglomerado estelar Olympus 010101 observado por B.

**Pergunta 3:**

Considerando que a Terra se comporte como um corpo negro ideal, calcule a diferença de temperatura na Terra quando esta estiver no periélio e no afélio. Adote que a distância Terra-Sol no afélio é de 1,01 ua e de 0,98 ua no periélio.

**Pergunta 4:**

A figura mostra a curva de luz de um sistema binário eclipsante tipo Algol, cujo plano orbital está na direção da linha de visada. Considerando que as componentes desse sistema têm o mesmo raio, determine a diferença de profundidade correspondente aos mínimos primário e secundário da curva de luz, sabendo que as estrelas têm temperaturas, respectivamente, iguais a  $T_1 = 5\,000\text{ K}$  e  $T_2 = 12\,000\text{ K}$ .



**Prova Individual – Dados e Constantes**

Raio do Sol:  $R_{\odot} = 4,6 \cdot 10^{-3}\text{ ua}$

Temperatura do Sol:  $T_{\odot} = 5\,800\text{ K}$

## Prova Teórica em Grupo

### Pergunta 1: Órbitas dos planetas

Determinar o período de um planeta requer algum cuidado, uma vez que a Terra, de onde fazemos as observações, realiza vários movimentos dependendo do referencial adotado. Chamamos o período sideral ( $P$ ) de um planeta, o intervalo de tempo que o mesmo leva para completar uma órbita ao redor do Sol. Já o período sinódico ( $S$ ), é o tempo decorrido entre duas configurações idênticas e sucessivas quando vistas da Terra como, por exemplo, o tempo entre uma conjunção e à seguinte. O período sinódico pode ser determinado diretamente observando o céu, mas o período sideral requer alguns cálculos. Copérnico descobriu como fazê-lo a partir da equação abaixo:

$$\frac{1}{P} = \frac{1}{T} \pm \frac{1}{S}$$

Onde  $T$  é o período sideral da Terra. Usamos o sinal positivo quando calculamos o período sinódico de um planeta interno, e o sinal negativo para planetas externos.

- A partir a relação acima, complete os dados faltantes na tabela referente ao período sideral ou sinódico dos planetas. Adote: 1 ano = 365,26 dias.
- Usando a terceira Lei de Kepler, complete a tabela com os valores dos semieixos maiores das órbitas dos planetas.
- Io é uma das quatro grandes luas de Júpiter, descobertas por Galileu, que orbita à distância de 421 600 km do centro de Júpiter com período orbital de 1,77 dias. A partir destes dados, determine a massa combinada de Júpiter e Io.
- Dado que a massa de Io é uma pequena fração da massa de Júpiter, determine a massa de Júpiter.

Planeta	Período Sideral (anos)	Período Sinódico (dias)	Semieixo maior (ua)
Mercúrio		115,88	
Vênus		584,00	
Terra	1,0	----	
Marte		780,00	
Júpiter	11,9		
Saturno		378,00	
Urano	84,1		
Netuno		368,00	

### Pergunta 2: Forças de Maré

As forças de maré são diferenças nas atrações gravitacionais em diferentes pontos de um objeto, uma consequência da gravidade que deforma os planetas e remodela as galáxias. Podemos ver os resultados desta força no fato de que a Lua permanece sempre com a mesma face voltada para a Terra, a medida que mantém a sua órbita. De acordo com a Lei da Gravitação Universal, proposta por Isaac Newton, a força da atração gravitacional ( $F$ ) entre objetos de massas  $m_1$  e  $m_2$  é maior quanto mais próximos esses dois objetos estão entre si. Quando necessário, adote como valor da constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$ .

A partir da Lei da Gravitação Universal de Newton, responda as perguntas abaixo:

- (a) Considere que a massa da Lua é de  $7,35 \cdot 10^{22}$  kg, enquanto que a da Terra é  $5,98 \cdot 10^{24}$  kg. A distância média entre o centro da Lua e o centro da Terra é de 384 000 km.
- Qual é a intensidade da força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua?
  - Qual é a intensidade da força gravitacional que a Lua exerce sobre a Terra? Justifique sua resposta a partir de uma das Leis de Newton.
- (b) Considerando que a massa do Sol é  $1,99 \cdot 10^{30}$  kg, determine a relação entre a força gravitacional Terra-Sol e Terra-Lua. Adote:  $1 \text{ ua} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

As forças de maré também são importantes em escalas galácticas. A imagem seguinte, do HST, mostra um o par de galáxias em interação - NGC2207 (à esquerda) e IC2163 (à direita). Durante os milhões de anos em que tem ocorrido esse encontro, as forças de maré da galáxia maior capturaram um imenso rastro de estrelas e gás interestelar da galáxia menor.



*Crédito de imagem: HST / NASA / ESA.*

Dahari, em 1984, desenvolveu um formalismo para estimar a força de maré sobre grandes objetos. Pode-se calcular o parâmetro ( $Q$ ) do efeito desta força que uma galáxia, de massa  $M_2$ , exerce sobre outra de massa  $M_1$  e diâmetro  $D_1$ , que são separadas por uma distância  $d$ , a partir da equação:

$$Q = \log \left[ \left( \frac{M_2}{M_1} \right) \left( \frac{D_1}{d} \right)^3 \right]$$

Com esta definição, note que o parâmetro da força de maré é adimensional.

Sabe-se que NGC2207 tem massa de  $1,16 \cdot 10^{10}$  massas solares e diâmetro de 31,33 kpc. Já IC2163 tem massa de  $7,28 \cdot 10^9$  massas solares e diâmetro de 28,76 kpc. Considerando que os centros das galáxias são separados por uma distância de 23,40 kpc, responda as seguintes questões:

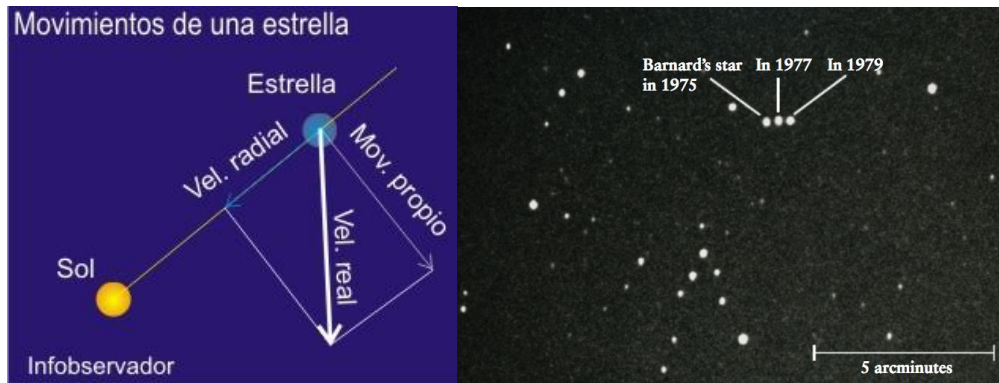
- (c)
- Qual é o parâmetro da força de maré que a galáxia NGC2207 exerce sobre a galáxia IC2163?
  - Calcule o parâmetro da força de maré que a galáxia IC2163 exerce sobre a galáxia NGC2207. Compare com o resultado obtido anteriormente. Explique seu resultado.
- (d) Estime o parâmetro da força de maré entre a Via Láctea e a galáxia de Andrômeda. Justifique sua estimativa. Adote: Magnitude absoluta do Sol = 4,83 e a magnitude aparente da Galáxia de Andrômeda = 3,45.

### Pergunta 3: Movimento das estrelas

As estrelas podem se mover através do espaço em qualquer direção. A velocidade real de uma estrela descreve o quão rápido e em que direção ela se move. Como mostra a figura a seguir, a velocidade real ( $v$ ) de uma estrela pode ser dividida em duas componentes perpendiculares entre si. Uma delas é a velocidade tangencial ( $v_t$ ), perpendicular à nossa linha de visada. Para determiná-la, os astrônomos devem conhecer a distância ( $d$ ) até a estrela e também o seu

movimento próprio ( $\mu$ ). Assumindo  $\mu$ , em segundo de arco por ano, e  $d$ , em parsecs, o valor da velocidade tangencial, em km/s, é determinado pela relação:

$$v_t = 4,74 \cdot \mu \cdot d$$



Crédito de imagen John Sanford/Science Photo Library

A componente do movimento da estrela, paralela à nossa linha de visada, é chamada de velocidade radial ( $v_r$ ). Seu valor pode ser determinado a partir do Efeito Doppler das linhas espectrais da estrela. Se uma estrela se aproxima, os comprimentos de onda das suas linhas espectrais diminuem (*blueshift*). Já quando a estrela está se afastando, os comprimentos de onda aumentam (*redshift*).

Na figura acima à direita, temos o movimento da estrela de Barnard a partir de três fotografias tiradas ao longo de quatro anos. Durante este período, Barnard se moveu cerca de 41,44 segundos de arco. Mais do que qualquer outra estrela! Quando necessário, adote  $c = 3 \cdot 10^5$  km/s.

- Determine a velocidade tangencial da estrela Barnard, considerando que sua distância é de 1,83 pc.
- No espectro desta estrela, a linha de ferro tem um comprimento de onda de 516,45 nm. Determine o módulo da sua velocidade radial, sabendo que a mesma linha espectral tem um comprimento de onda de 516,63 nm quando observada em um laboratório fixo na Terra.
- A estrela de Barnard está se afastando ou se aproximando de nós? Justifique.
- Determine a velocidade real da estrela de Barnard.

#### Pergunta 4: Lei de Hubble

Suponha que você esteja com um telescópio em um observatório e tira o espectro de uma galáxia distante. Quando você o examina, descobre que as linhas espectrais estão se movendo em direção ao vermelho do espectro. O *redshift* da galáxia ( $z$ ), é dado por:

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}$$

A partir do *redshift* podemos determinar a velocidade radial de uma galáxia, conhecida como velocidade de recessão. Se o *redshift* for inferior a 0,1, podemos desprezar os efeitos relativísticos, de modo que  $v = c \cdot z$ , onde  $c = 3 \cdot 10^5$  km/s é a velocidade da luz.

Conforme mostrado ao lado [Gráfico 1], a relação entre  $z$  e  $v$  não é sempre linear. Se o *redshift* for maior do que 0,1, então devemos usar a seguinte relação:

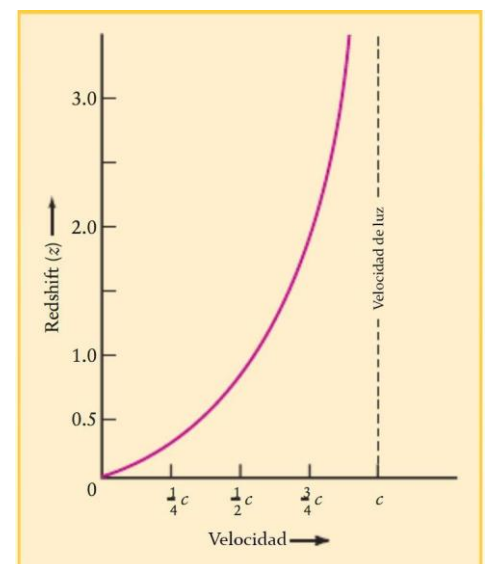


Gráfico 1

$$v = \left[ \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \right] \cdot c$$

Conhecendo a velocidade de recessão da galáxia, podemos determinar sua distância ( $D$ ) a partir da Lei de Hubble:

$$v = H_0 \cdot D$$

Onde  $H_0 = 73 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$ , é a constante de Hubble.

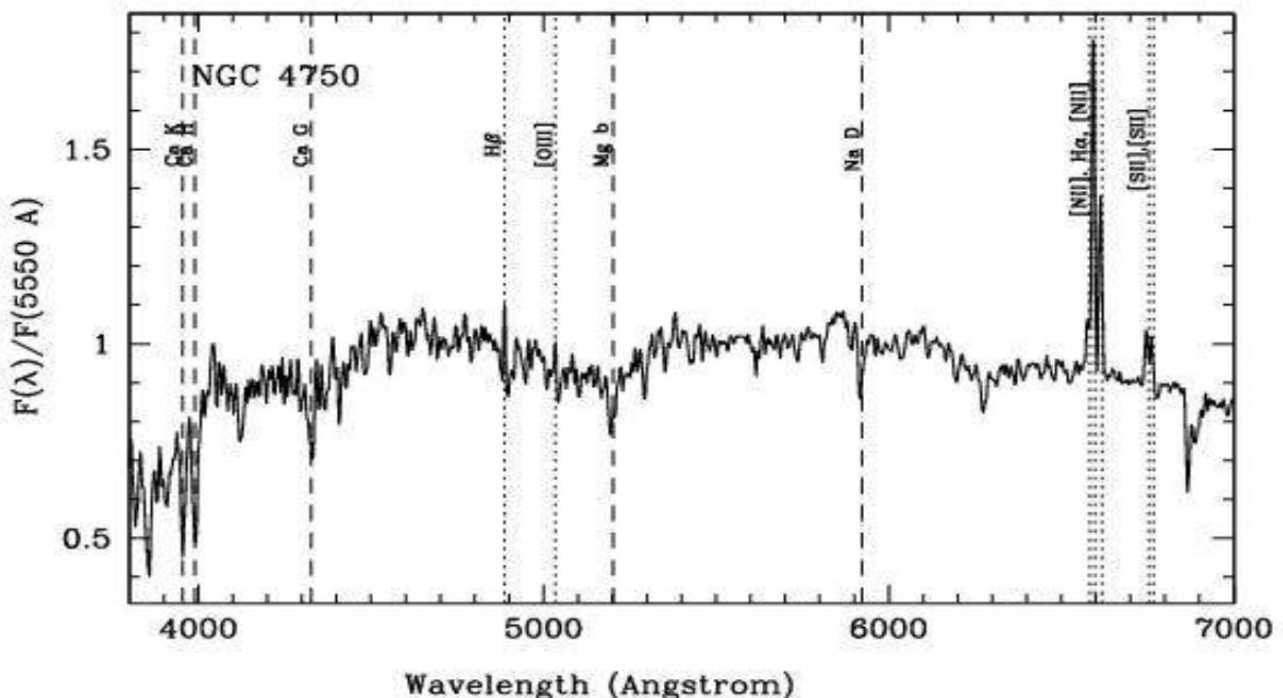
A partir dos dados apresentados, responda os itens a seguir.

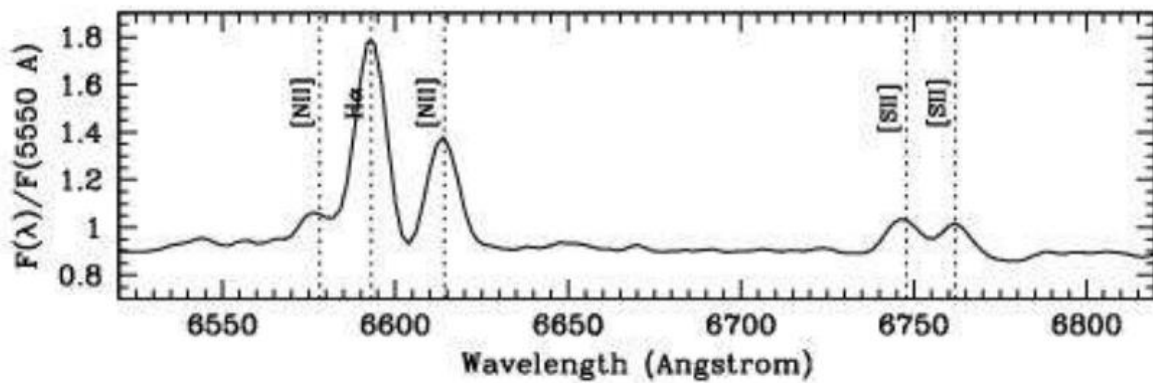
- Quando medido em um laboratório fixo na Terra, a linha K do cálcio ionizado, possui um comprimento de onda  $\lambda_0 = 393,3 \text{ nm}$ . Já quando medido no espectro da galáxia elíptica gigante NGC4889, essa mesma linha encontra-se em  $\lambda = 401,8 \text{ nm}$ . Determine a distância da Terra a NGC4889.
- No final de 1997, os astrônomos observaram uma supernova tipo Ia, chamada SN1997ff, com *redshift*  $z = 1,7$ . Use a Lei de Hubble para encontrar a distância até essa supernova.
- Observe a seguir os espectros de três galáxias - NGC4750, NGC7714 e NGC4631. Para cada galáxia é apresentado o espectro observado no óptico e a amplificação na faixa espectral da linha  $H\alpha$  ( $\lambda_0 = 6562,8 \text{ \AA}$ ). Analisando os gráficos, preencha a tabela com os comprimentos de onda observados ( $\lambda$ ) em cada galáxia. Estime também o *redshift*, a velocidade de recessão e a distância, em relação a Terra, de cada um dos objetos. *Nota:* Mostramos como um exemplo a identificação de linhas de absorção e emissão para a primeira galáxia, NGC4750.

Galáxia	$\lambda(\text{\AA})$	$z$	$v$ (km/s)	$D$ (Mpc)
NGC4750	6593			
NGC7714				
NGC4631				

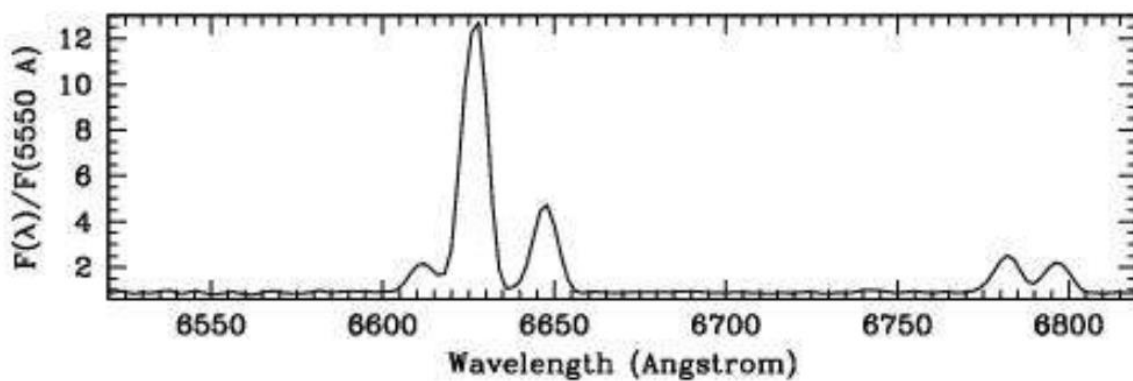
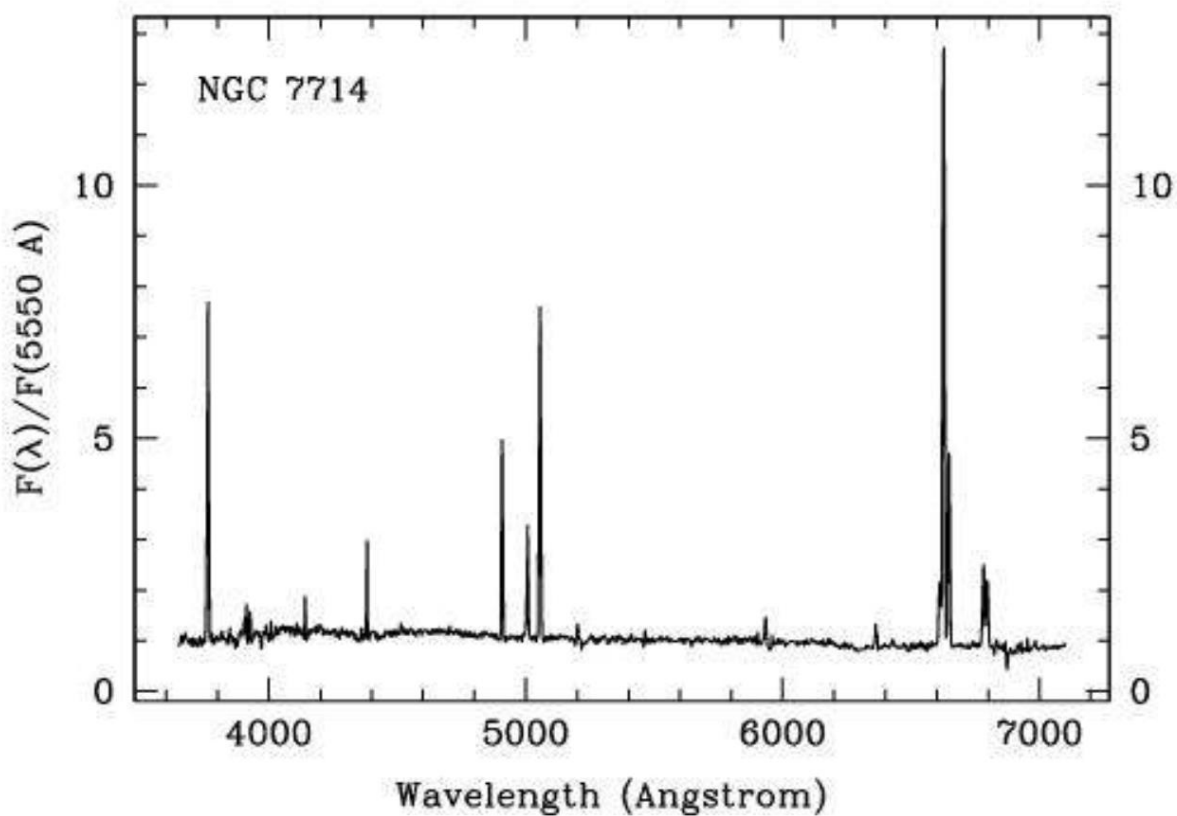
- Construa um gráfico  $v$  versus  $D$  com os dados dos objetos dos itens (a), (b) e (c). Tendo em conta que na origem do gráfico está localizado na Via Láctea, o que você pode dizer sobre a dinâmica do nosso universo?

## NGC 4750

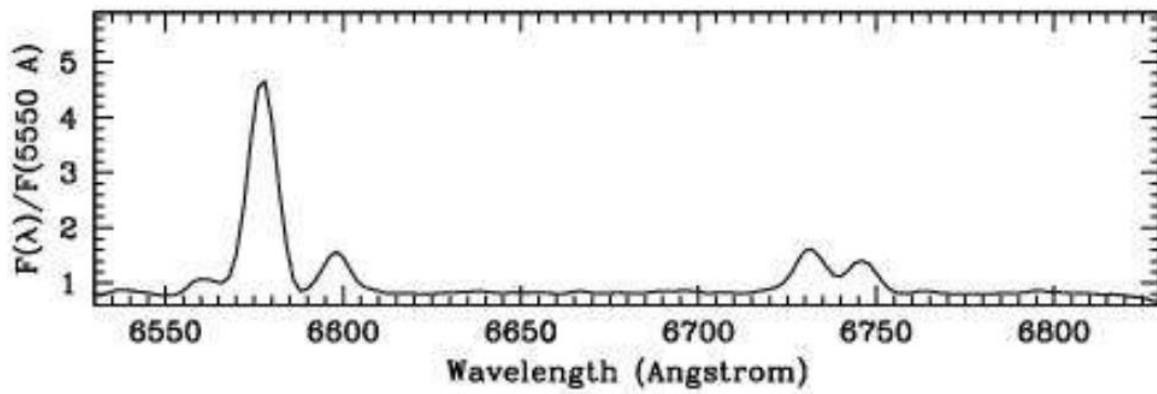
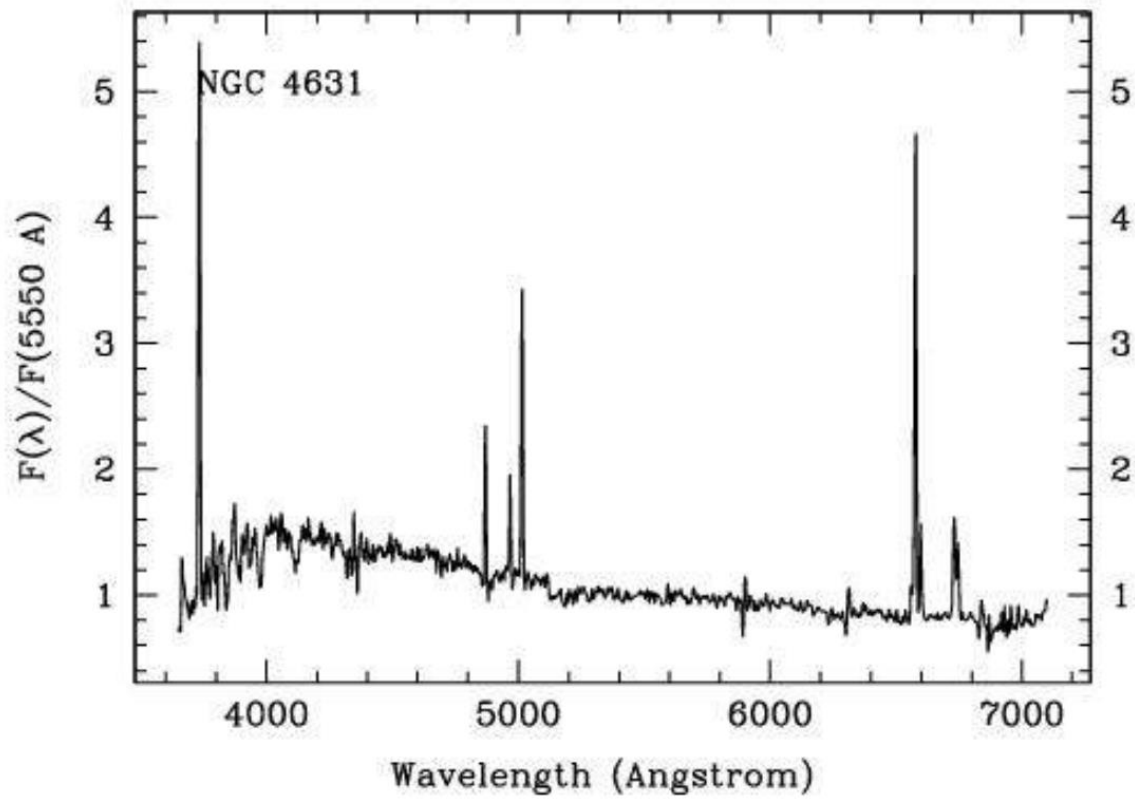




### NGC 7714



## NGC4631



## X Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

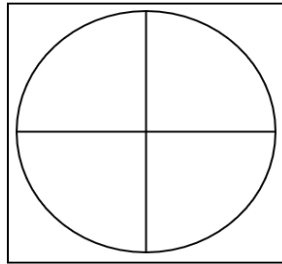
14 a 20 de outubro de 2018 – Ayolas – Paraguai

### Prova Teórica Individual



- 1) Um planeta é constituído por três camadas esféricas concêntricas, sendo a primeira seu núcleo esférico. O volume do núcleo é igual ao da camada intermediária que o rodeia. O raio do núcleo é a quarta parte do diâmetro do planeta e tem uma densidade 9 vezes a da água. A camada intermediária tem uma espessura de 519,84 km e uma densidade 5 vezes a da água. A camada externa tem densidade 3 vezes a da água. Calcule a aceleração da gravidade:
- Na superfície externa do planeta;
  - No centro do planeta;
  - Na separação entre a segunda camada e a externa.
- 2) Uma estrela gira ao redor de um buraco negro com o plano orbital paralela ao plano de visada do observador. Observa-se que a linha de repouso de  $5\,985\text{ \AA}$  varia de  $5\,975\text{ \AA}$  a  $6\,000\text{ \AA}$ , onde o deslocamento máximo para o vermelho ocorre em 3 dias e o deslocamento máximo para o azul ocorre em 4 dias, repetindo-se ciclicamente. Calcule:
- Seu período de translação ao redor do buraco negro;
  - As velocidades máximas e mínimas;
  - A excentricidade de sua órbita.
- 3) Dois sistemas estelares binários, um a vinte anos luz de distância e outro a sessenta anos luz de distância, se superpõem no céu. Mediante certos estudos se determina que as magnitudes aparentes das duas primeiras são: 1 e 2 e das duas últimas 3 e 4. Calcule:
- A magnitude absoluta de cada sistema;
  - A magnitude aparente das quatro estrelas.
- 4) O sacerdote jesuíta Padre Buenaventura Suárez, que foi o primeiro astrônomo do Paraguai e de todo o Rio da Prata, fabricava seus próprios telescópios e relógios para medir o tempo, tanto solar quanto sideral. Em um dia como hoje, 16 de outubro, ele decidiu medir a culminação de algumas estrelas a partir da Missão dos santos Cosme e Damião, latitude  $27^\circ 19'$  Sul e longitude  $56^\circ 21'$  Oeste. Ventu, como era chamado por seus companheiros da Missão, fixou dois postes alinhados na direção Norte-Sul separados de uma distância de 2,0 metros. O poste que se encontrava ao Norte tinha uma altura de 1,0 m e o poste que se encontrava ao Sul tinha altura de 2,0 m. Sobre eles, montou seu telescópio refrator com ocular convergente. Em um dado momento, quando Ventu observava uma estrela culminar no campo de seu telescópio, o Tempo Sideral de *Greenwich* (*TSG*) era 01 h 16 min. Indique:
- O azimute ( $A$ ) da estrela, medido do sul no sentido do movimento diurno (NESW).
  - A altura ( $h$ ) da estrela.
  - O ângulo horário ( $H$ ) da estrela.
  - A ascensão reta ( $\alpha$ ) da estrela (justifique sua estimativa e seu raciocínio).
  - A declinação ( $\delta$ ) da estrela.

- f) A distância polar da estrela.  
 g) O tipo de culminação observada por Ventu.  
 h) Desenhe no gabarito ao lado a trajetória e o sentido que seguiu a estrela observada por Ventu no campo de seu telescópio com ocular convergente indicando os pontos cardiais. Justifique.



- 5) Ao orbitar um planeta, uma nave espacial de massa igual a  $9 \cdot 10^3$  kg tem um período de 100 minutos e uma distância média ao centro do planeta era  $2 \cdot 10^3$  km. Suponha que sua órbita era circular e considere o planeta como uma esfera uniforme. Calcule:
- A massa do planeta.
  - A velocidade orbital da nave.
  - A energia adicional requerida para que a nave abandone a órbita e escape do campo gravitacional do planeta.

#### Prova Individual – Dados e Constantes

Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s

Constante de gravitação universal:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Constante de Planck:  $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  J.s

1 pc = 3,26 al =  $3,1 \cdot 10^{16}$  m

1 ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m

### Prova Teórica em Grupo

- 1) Tomando a calibragem dada em Feast e Catchpole (1997) para estrelas cefeidas,

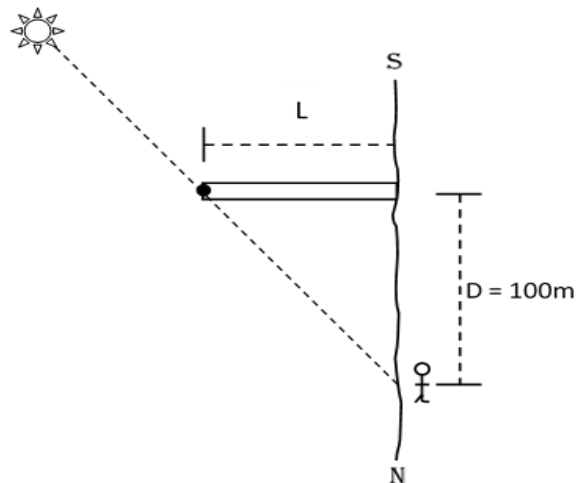
$$P = 10^{-\frac{M_V + 1,43}{2,80}}$$

Onde  $M_V$  é a magnitude absoluta e  $P$  é o período em dias.

- Calcule a que distância se encontra uma galáxia que contém uma estrela cefeida de magnitude aparente  $m_V = 20,2$  e um período de 84,7 dias.
- Calcule a velocidade de afastamento que teria essa galáxia. Use  $H_0 = 71$  (km/s · Mpc).
- Sabe-se que a temperatura atual do universo é  $T_0$ . Ache uma expressão que relacione a temperatura do universo com o deslocamento ao vermelho.
- Usando a expressão anterior, e considerando que a temperatura atual do universo é  $T_0 = 2,73$  K, encontre a temperatura do universo na época correspondente à idade observada da galáxia.

- 2) Um satélite encontra-se em órbita circular equatorial a uma altura  $h$  da superfície de um planeta de massa  $M$  e raio  $R_p$ . O período de rotação do planeta é  $P$ . Mediante dois impulsos tangentes,  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ , deseja-se transferir o satélite a uma nova órbita circular “planetoestacionária” de raio maior que o inicial.
- Faça um desenho da órbita de transferência indicando as direções e sentidos de  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ .
  - Calcule, em função de  $G$ ,  $M$ ,  $R_p$ ,  $P$  e  $h$ :
    - O Raio  $R$  da órbita “planetoestacionária”.
    - Os valores de  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ .
    - O tempo de transferência da órbita inicial à órbita final.
    - A excentricidade da órbita de transferência.

- 3) No dia 15 de outubro, na cidade de Ayolas, Paraguai (latitude  $27^\circ 24'$  Sul e longitude  $56^\circ 51'$  Oeste), uma pessoa percorrendo um trecho de distância  $D$  a margem do rio Paraná observa que o Sol nasce exatamente no extremo de um píer, como mostra a figura abaixo. A distância  $D$  é igual a 100 m. Na tabela dada estão as declinações do Sol em certos dias. Utilizando esses dados e as relações de trigonometria esférica, a seguir, encontre o comprimento  $L$  do píer.



DATA	DECLINAÇÃO
01 de outubro	$- 03^\circ 19' 38''$
10 de outubro	$- 06^\circ 46' 45''$
20 de outubro	$- 10^\circ 28' 01''$
30 de outubro	$- 13^\circ 53' 43''$

- 4) Desenhe, um diagrama Hertzsprung-Russel (HR) e:
- Defina os limites de temperatura efetiva e luminosidade em unidades apropriadas.
  - Desenhe a sequência principal.
  - Desenhe a trajetória de evolução pré-sequência principal (Hayashi) para uma estrela de  $1 M_{\text{Sol}}$ .
  - Desenhe a trajetória de pós-sequência principal para uma estrela de  $1 M_{\text{Sol}}$ .
  - Marque as fases de gigante vermelha, ramo assintótico das gigantes e nebulosas planetárias para uma estrela de  $1 M_{\text{Sol}}$ .
  - Indicar as regiões de evolução onde ocorrem:
    - a fusão do hidrogênio no núcleo;
    - a fusão do hidrogênio na camada exterior;
    - a fusão do hélio no núcleo e
    - a fusão do hélio na camada exterior.

**Prova em Grupo – Dados e Constantes**

Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3.10^8$  m/s

Constante de gravitação universal:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N.m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>

Constante de Planck:  $h = 6,63.10^{-34}$  J.s

1 pc = 3,26 al =  $3,1.10^{16}$  m

1 ua =  $1,5.10^{11}$  m

**XI Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
 21 a 25 de outubro de 2019 – Puebla – México



**Prova Teórica Individual**

**1) Telescópios espaciais**

Os telescópios espaciais orbitam fora da atmosfera da Terra e têm a função de gerar imagens de qualidade superior as dos telescópios terrestres. Isso ocorre porque eles evitam os efeitos de distorção que ocorrem na atmosfera. A NASA planeja substituir o Telescópio Espacial Hubble pelo Telescópio Espacial James Webb (JWST) em 2021. Este telescópio terá um espelho primário com um diâmetro de  $d_J = 6,5$  m. Sabendo que o Hubble tem um espelho primário com um diâmetro de  $d_H = 2,4$  m, responda:

a) Qual será a resolução angular do JWST? Considere o comprimento de onda médio na região visível  $\lambda = 550$  nm.

$S$  é definido como a distância mínima entre duas estrelas, para que possam ser resolvidas observando-as com um telescópio com uma determinada resolução espacial.

b) Se duas estrelas estão a uma distância de 3 milhões de anos-luz da Terra e emitem no visível.

- i - Quanto vale  $S$  se for observado com o telescópio JWST?
- ii - Quanto vale  $S$  se for observado com o telescópio Hubble?

c) Construa um gráfico que mostre o diâmetro do espelho de um telescópio em função do comprimento de onda  $\lambda$ , de modo que a resolução seja sempre  $1''$ . O gráfico deve variar de comprimentos de onda ultravioleta distantes  $\lambda_{FUV} = 200$  nm até comprimentos de onda infravermelhos  $\lambda_{NIR} = 10 \mu\text{m}$ .

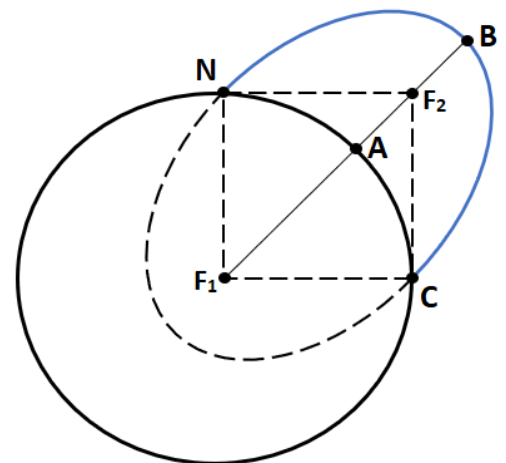
d) O ser humano emite energia infravermelha a  $10 \mu\text{m}$  e, à distância da órbita do Hubble, subtende um ângulo de  $1''$ . A partir do gráfico construído no item anterior responda: O telescópio espacial Hubble pode distinguir um humano por sua emissão de calor?

**2) Foguete**

Um foguete é lançado do polo Norte da Terra, indicado com a letra N na figura ao lado, com velocidade  $v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus}}}$  de modo que caia no Equador, indicado com a letra C. Ignore a resistência do ar e a rotação da Terra.

*Adote:*  $F_1$  e  $F_2$  são os focos da elipse da órbita do foguete.

- a) Encontre o comprimento do semieixo maior da órbita do foguete.
- b) Qual é a altura máxima  $h$  que o foguete atinge em relação à superfície da Terra?
- c) Qual é o tempo de voo do foguete? Considere  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ .



### 3) Cientistas extra-solares

Imagine a seguinte situação: Uma civilização extrassolar que habita o exoplaneta Umi descobriu que: (i) Umi orbita a estrela Ciro. (ii) Há outro planeta, chamado Eki, orbitando Ciro.

Suponha que Umi e Eki se comportem como corpos negros, que giram rapidamente em seu próprio eixo, e que suas órbitas ao redor de Ciro são circulares.

Seja  $r$  o raio de Umi,  $T$  a temperatura de Ciro,  $R$  o raio de Ciro,  $a_1$  e  $a_2$  o raio orbital de Umi e Eki, respectivamente.

a) Obtenha uma expressão para a temperatura de Umi, em termos de  $R$ ,  $T$  e  $a_1$ .

b) Os astrônomos de Umi determinaram que a magnitude aparente de sua estrela Ciro é  $m_1 = -27$ , calcule o valor numérico da temperatura de Umi.

O período orbital de Umi é  $P = 423$  dias terrestres e a magnitude aparente de Eki, como vista de Umi, é  $m_2 = -2,6$  quando Eki tem tamanho angular de  $\theta = 20''$ .

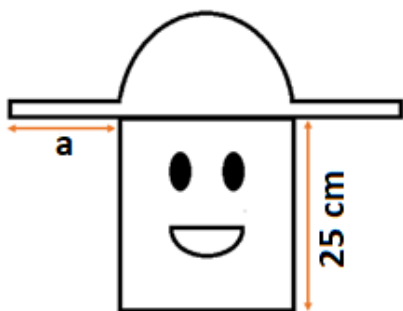
c) Obtenha uma expressão para o fluxo que Umi recebe de Eki em termos  $R$ ,  $T$ ,  $\theta$  e  $a_2$ .

d) Obtenha uma expressão para a razão  $\frac{a_1}{a_2}$  em termos de  $\theta$ ,  $m_1$  e  $m_2$ .

e) Calcule o período orbital de Eki.

### 4) Chapéu UV

Citlali é uma jovem preocupada com os danos que a radiação ultravioleta do Sol pode causar à sua pele, por isso decide fazer um chapéu com características especiais. Citlali vive em Puebla, um lugar de latitude  $\phi = 19^\circ N$ . Considere que a cabeça da Citlali é um cilindro.



a) Qual é a medida mínima  $a$  que a aba do chapéu deve ter se ela quiser evitar a radiação solar UV no seu rosto ao meio-dia em 21 de março?

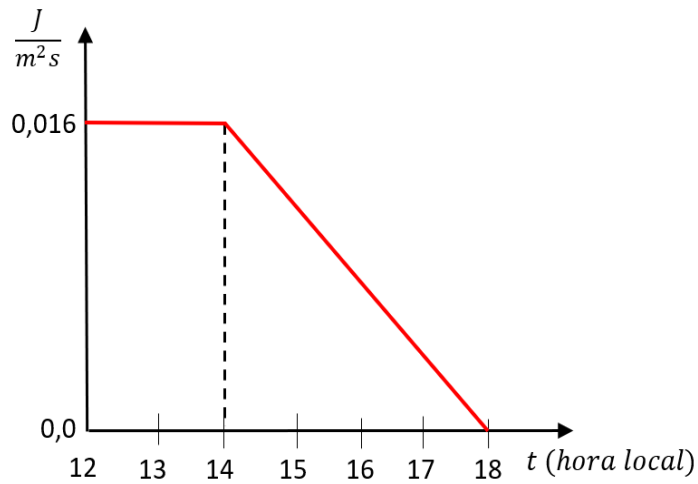
b) Qual é a medida mínima que a aba do chapéu deve ter se ela quiser evitar a radiação solar UV no seu rosto ao meio-dia todos os dias do ano?

Citlali decide que a aba do chapéu mede  $a = 13 \text{ cm}$ .

c) Se a Citlali estiver no Equador em 21 de setembro, a que horas desse dia seu chapéu cumpre o propósito de proteger todo o seu rosto?

A dose eritematosa mínima (vulgo vermelhidão) por radiação UV ( $DEM$ ), que é a medida da energia mínima por unidade de área que causa queimaduras na pele de um ser humano médio e é  $DEM = 100 \text{ J/m}^2$ . O chapéu de Citlali absorve metade da radiação UV que recebe e deixa a outra metade passar.

d) Usando os dados do gráfico, responda: Se Citlali começa se expor ao Sol ao meio-dia, a partir de que hora local, mesmo com o chapéu, ela terá queimadura solar causada por raios UV?



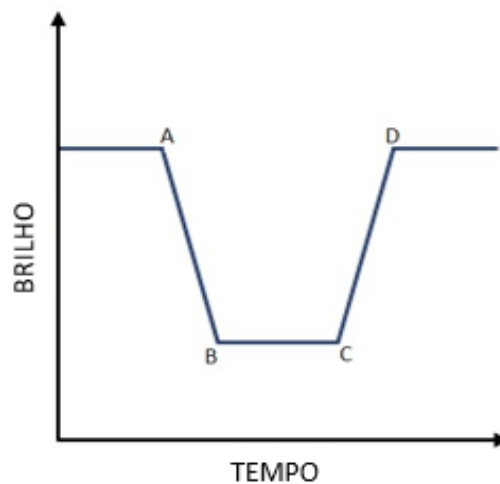
## Prova Teórica em Grupo

### 1) Detecção de exoplanetas

Um exoplaneta é um planeta que reside fora do nosso Sistema Solar. Em particular, vamos ver o sistema planetário da estrela TRAPPIST-1.

TRAPPIST-1 é uma estrela anã de tipo espectral M8V, a uma distância de 12 pc na constelação de Aquário. Em 2015, uma equipe de astrônomos usou o telescópio TRAPPIST, localizado no Observatório de La Silla, no deserto do Atacama, Chile, para estudar TRAPPIST-1. Através do uso de trânsitos planetários, foram encontrados três exoplanetas que orbitam esta estrela. Em 22 de fevereiro de 2017, foi anunciada a descoberta de outros quatro exoplanetas que orbitam o TRAPPIST-1, adicionando um total de sete exoplanetas que orbitam esta estrela.

A *figura 1* mostra a curva de luz de TRAPPIST-1 sendo eclipsada pelo exoplaneta TRAPPIST-1g. O tempo decorrido entre o primeiro contato (ponto A) e o último contato (ponto D) é de 1,19 hora e o tempo decorrido entre os pontos B e C é de 0,99 hora. Para as perguntas seguintes, suponha que as órbitas sejam circulares.



*figura 1*

a) Calcule o raio  $R$  de TRAPPIST-1 e também o raio  $r$  de TRAPPIST-1g. Considere que o plano orbital do sistema TRAPPIST-1 é paralelo à nossa linha de visada e que a velocidade tangencial do TRAPPIST-1g é  $v = 4,15 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ . Agora considere que a magnitude aparente de TRAPPIST-1 quando não é eclipsada por nenhum dos sete exoplanetas do sistema é  $m_1 = 13,43$ .

b) Calcule a temperatura do TRAPPIST-1.

c) Encontre a expressão analítica, em função de  $R$ ,  $r$  e  $m_1$ , para calcular a magnitude aparente  $m_2$  quando o sistema estiver entre os pontos B e C.

A zona habitável é a região onde a radiação permite a presença de água no estado líquido. Considere que a água evapora a  $100^\circ\text{C}$  e congela a  $0^\circ\text{C}$ .

d) Use os dados da *tabela 1* para calcular a massa da estrela TRAPPIST-1. Em seguida, preencha os demais espaços da tabela com as informações que faltam referentes ao período orbital (em dias) e raio orbital (em ua) dos sete exoplanetas de TRAPPIST-1.

e) Os exoplanetas giram rapidamente em torno de seus próprios eixos e toda a energia absorvida por eles é reemitida como radiação de corpo negro. Supondo que o albedo de cada um dos exoplanetas seja igual  $a = 0,1$ . Quais exoplanetas são encontrados dentro da zona habitável?

O inovador *Starshot* (Tiro estelar) é um projeto que pretende desenvolver micro naves espaciais capazes de viajar a 20% da velocidade da luz.

Considere que a aceleração das micro naves para alcançar os 20% da velocidade da luz é de  $35 \text{ m/s}^2$ .

f) Se usássemos uma dessas micro naves para chegar a TRAPPIST-1, estime o tempo mínimo de duração desta viagem.

*Tabela 1*

Planeta	Período (dias)	Raio orbital (ua)
1 b	1,51	
1 c		0,015
1 d	4,04	
1 e	6,09	0,028
1 f	9,20	
1 g	12,35	0,045
1 h		0,059

## 2) Astronomia e os Maias

Chichén Itzá, localizado em Tinum no México, é um dos sítios arqueológicos mais interessantes da civilização Maia devido às orientações astronômicas precisas que algumas de suas construções apresentam.

É provável que, para os Maias, a passagem do Sol pelo zênite tenha sido de grande importância, pois esse evento marca o final da estação seca e o início da estação chuvosa. Manter um registro dessas datas facilitou as atividades agrícolas.

Para os itens a seguir, adote a convenção de azimute NESW.

a) Ao meio-dia, de 21 de dezembro, o templo de Kukulcan lança uma sombra de 22 m de comprimento. Determine a latitude de Chichén Itzá sabendo que a altura do cume do templo é de 23 m (*Figura 1*).

Medidas revelam que a escada Oeste do templo Kukulcan possui azimute de  $290^\circ$  medido a partir do Norte (*Figura 2*).

b) Qual é o ângulo de desvio ( $\theta$ ) dos eixos da pirâmide em relação aos pontos cardeais?

Atualmente, nos dias 23 de maio e 19 de julho, ocorre a passagem zenital do Sol em Tinum. Nestes dias, a luz do Sol penetra de forma vertical, através de um buraco retangular delineado na rocha pelos Maias, em um grande poço conhecido como Cenote de Holtún (*Figura 3*). O Cenote de Holtun possui simbolismo religioso relacionado ao submundo da cosmovisão Maia.

c) Qual é o azimute do Sol, ao seu nascer e pôr, no dia 23 de maio em Tinum?

O planeta Vênus, chamado pelos Maias de Ahzab Kab Ek (a Estrela que desperta a Terra), era uma estrela muito importante associada a guerra, morte, pestilência e destruição. As janelas do *El Caracol*, o mais importante observatório astronômico Maia em Chichén Itzá, permitem acompanhar a trajetória do referido planeta ao longo do ano.

d) Qual é o diâmetro angular de Vênus, visto da Terra, em suas aproximações máxima e mínima?

Adote: distância Vênus-Sol = 0,72 ua; raio de Vênus = 6 051,8 km.

A unidade básica no calendário Maia é de um dia, ou kin. Vinte kines formam um winal e 18 winales dão uma aproximação do ano solar de 360 dias, conhecido como tun. Vinte tunes formam um katún e 20 katunes um baktún. O maior período de contagem Maia é um ciclo com duração de 13 baktunes.

e) As Plêiades culminam superiormente em Tinum ( $\lambda = 88^\circ 34' W$ ) às 3:47 am do dia 21 de setembro. Determine o ângulo horário do aglomerado em *Greenwich*, à mesma hora, transcorridos 13 winales e 18 kines.

f) Determine se as Plêiades são circumpolares visíveis em Tinum, sabendo que a altura das Plêiades na culminação superior é de  $83^\circ 36'$ .

g) O final do último maior período de contagem Maia aconteceu no dia 21 de dezembro de 2012. Qual foi a data de início deste ciclo? Adote que 1 ano possui 365.

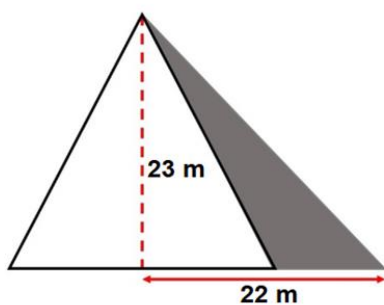


Figura 1

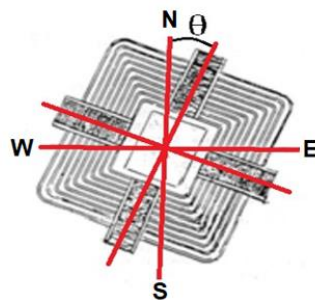


Figura 2

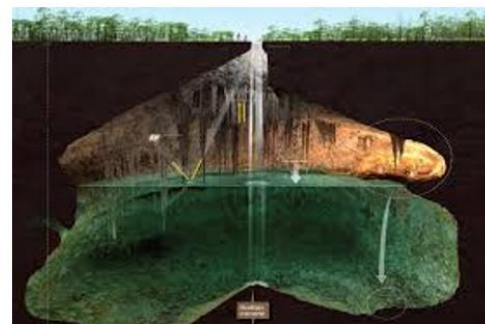


Figura 3 - Cenote de Holtun

### 3) Matéria escura em uma galáxia

Vera Cooper Rubin foi uma astrônoma americana, pioneira em medir a rotação de estrelas dentro de uma galáxia. Suas medições são evidências da existência de matéria escura.

A atração gravitacional da matéria observável é muito fraca para justificar as velocidades de rotação das galáxias, isso implica que deve haver massa não visível em algum lugar dentro ou ao redor das galáxias que permita que essas velocidades existam. Essa matéria oculta é conhecida como matéria escura.

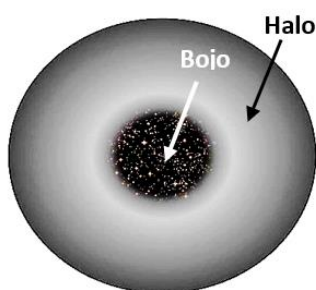


Figura 1

Para esse problema, as galáxias observadas por Rubin serão modeladas da seguinte forma: um bojo esférico de raio  $R_b$  cercado por um halo esférico, como mostra a *Figura 1*. Em todo o problema, considere que as estrelas são corpos pontuais de massa  $m$  uniformemente distribuídos no bojo, com densidade numérica  $n$  e que se movem em órbitas circulares. A massa das estrelas encontradas no halo é insignificante.

- a) Se a galáxia consiste apenas de estrelas, encontre a velocidade das estrelas  $v(r)$  em função de sua distância  $r$  ao centro da galáxia. Considere os casos  $r < R_b$  e  $r \geq R_b$ .
- b) Faça um esboço da função  $v(r)$  que você obteve no item anterior.

A galáxia NGC7537 está a uma distância de 38 Mpc e sua magnitude aparente é  $m = 15,7$ . Suponha que a galáxia NGC7537 possui apenas estrelas semelhantes ao Sol.

- c) Estime o número de estrelas na galáxia NGC7537.

A *Tabela 1* mostra os valores observados da velocidade de rotação para algumas estrelas e o diâmetro angular de suas órbitas ao redor do centro de NGC7537. Considere que o diâmetro angular do bojo desta galáxia é  $20''$ .

- d) Com os dados da *Tabela 1*, faça um gráfico da velocidade em função da distância do centro da galáxia (medida em kpc).
- e) Qual é a função  $v(r)$  para a galáxia NGC7537?

- f) Estime a massa total do bojo da galáxia NGC7537. Expresse sua resposta em massas solares.

A discrepância entre os gráficos obtidos nos itens **(b)** e **(d)** indica a existência de matéria escura na galáxia. Suponha que o perfil de densidade esférica da matéria escura é definida pela seguinte função:

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{r_0}\right)^\alpha$$

- g) Determine o expoente  $\alpha$ , necessário para obter um gráfico como o do item **(d)** para  $r > R_b$ .

Embora a existência de matéria escura seja uma solução aceita para o problema da curva de rotação das galáxias, se pode sugerir uma solução alternativa, modificar as Leis de Newton. A dinâmica newtoniana modificada (*MOND* na sigla em inglês) é uma hipótese que postula que a Segunda Lei de Newton pode ser reescrita como  $F = ma\mu$  onde  $\mu$  é uma função com a propriedade de  $\mu = 1$  para  $\frac{a}{a_0} \gg 1$ ; e  $\mu = \frac{a}{a_0}$  para  $\frac{a}{a_0} \ll 1$ , onde  $a$  é a aceleração e  $a_0$  é uma constante que determina a transição entre a gravitação de Newton e a *MOND*.

- h) Mostre que essa reformulação leva a que a velocidade de rotação seja constante no halo esférico de uma galáxia quando  $a \ll a_0$ .

Tabela 1

Diâmetro angular (")	$v$ (km/s)
2	14,32
4	29,48
6	46,06
8	58,04
10	73,5
12	91,1
14	106,76
16	121,48
18	134,86
20	150,14
22	149,72
28	150,72
34	151,14
40	149,2
46	151,22
52	148,62
58	151,68
64	150,28
70	150,28
76	150,62

**Prova em Grupo – Dados e Constantes**Raio da Terra:  $R_{\oplus} = 6\,371$  kmRaio do Sol:  $R_{\odot} = 6,95 \cdot 10^8$  mTemperatura do Sol:  $T_{\odot} = 5\,778$  KMassa do Sol:  $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$  kgConstante solar:  $F_{\odot} = 1\,366$  W/m<sup>2</sup>Magnitude aparente do Sol:  $m_{\odot} = -26,72$ Constante de Stefan-Boltzmann:  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  W/(m<sup>2</sup>·K<sup>4</sup>)Constante gravitacional:  $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$  N·m<sup>2</sup>/kg<sup>2</sup>Velocidade da luz no vácuo:  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s1 ua =  $1,5 \cdot 10^{11}$  m1 pc = 3,26 al =  $3,086 \cdot 10^{16}$  m1'' =  $4,848 \cdot 10^{-6}$  rad



## I Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

12 a 19 de outubro de 2009 – Rio de Janeiro – Brasil



## Prova Teórica Individual – Resoluções

1) a) A diferença entre as longitudes de Manágua e Montevideu é de  $\Delta\lambda = 86^\circ - 56^\circ = 30^\circ = 2h$ . Como Manágua está a Oeste de Montevideu, quando a estrela em questão for observada em sua culminação superior em Manágua já terão se passado 2h desde a sua passagem zenital em Montevideu. Portanto, em Montevideu serão **22 h**.

b) Como a estrela passa pelo zênite de Montevideu ( $\phi = 35^\circ S$ ), sua declinação será igual, em módulo, a latitude local, ou seja,  $|\delta| = 35^\circ$ . Portanto, a altura  $h$  na qual um observador em Manágua ( $\phi' = 12^\circ N$ ) vê a estrela culminar superiormente é:

$$h + |\delta| + \phi' = 90^\circ \Rightarrow h + 35^\circ + 12^\circ = 90^\circ \Rightarrow h = 43^\circ$$

2) a) Se é Lua Cheia e ela se encontra na constelação de Virgem, o Sol estará diametralmente oposto na constelação de Peixes, ou seja, próximo ao Ponto Vernal. Logo, estamos no equinócio do **outono** para o hemisfério Sul marcando o início desta estação.

b) Considerando que é Lua Cheia e estamos em um equinócio, temos que o seu nascer ocorreu às **18 h**.

3) a) Sabendo que a distância Terra-Sol é de 1 ua e considerando as órbitas circulares, da 3ª Lei de Kepler, vem:

$$P^2 = a^3 \Rightarrow P^2 = 2^3 \Rightarrow P = 2\sqrt{2} \text{ anos}$$

b) Considerando as órbitas circulares, da 3ª Lei de Kepler, vem:

$$P^2 = a^3 \Rightarrow 2^2 = a^3 \Rightarrow a = 1,587 \text{ ua}$$

4) a) Considerando que as magnitudes aparentes dos dois satélites formam um sistema binário  $m_1$  e  $m_2$ , cujo plano está perpendicular à linha de visada do observador, e os respectivos fluxos luminosos são  $F_1$  e  $F_2$ . Da equação geral das magnitudes, temos que a magnitude combinada  $m_c$  do sistema, pode ser expressa por:

$$\left| \begin{array}{l} m_c - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F_c}{F_1}\right) \\ F_c = F_1 + F_2 \end{array} \right. \Rightarrow m_c - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F_1 + F_2}{F_1}\right) \Rightarrow m_c = m_1 - \frac{5}{2} \cdot \log\left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right)$$

Como os dois satélites têm o mesmo brilho, temos que  $F_1 = F_2$ . Na situação da [fig.b] houve ocultação total, logo a magnitude observada  $m_o$  é igual a magnitude de um dos componentes, assim:

$$m_c = m_o - \frac{5}{2} \cdot \log\left(1 + \frac{F_2}{F_1}\right) \Rightarrow 5,25 = m_o - \frac{5}{2} \cdot \log 2 \Rightarrow m_o = 6$$

b) Como a magnitude observada na [fig.b] é igual a magnitude aparente de cada satélite, temos que:

$$m_o = m_1 = m_2 = 6$$

5) a) Como a estrela K possui menor luminosidade em relação a estrela B, sua magnitude absoluta será maior.

b) Se a luminosidade da estrela B é maior que a da estrela K e as duas aparecem no céu com a mesma magnitude aparente, temos que a estrela B estará mais distante.

6) Conhecendo a magnitude absoluta  $M = 2$  e aparente  $m = 8$  da estrela analisada, temos que sua distância (em parsec) considerando o coeficiente de extinção será:

$$m - M = 5 \log \frac{r_1}{10} - \alpha \Rightarrow 8 - 2 = 5 \log \frac{r_1}{10} - 2 \cdot 10^{-3} \Rightarrow r_1 = 158,635 \text{ pc}$$

Desconsiderando o coeficiente de extinção, temos:

$$m - M = 5 \log \frac{r_2}{10} \Rightarrow 8 - 2 = 5 \log \frac{r_2}{10} \Rightarrow r_2 = 158,489 \text{ pc}$$

Analisando os dados anteriores, temos que considerando o coeficiente de extinção, a estrela parecerá mais longínqua.

7) a) Quando uma galáxia se afasta do observador, temos que as linhas espectrais analisadas se deslocam para o **vermelho** em relação as mesmas linhas observadas em situação de repouso.

b) Da equação do Efeito Doppler apresentada, e sabendo que a velocidade da luz no vácuo é  $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$ , temos:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \left( \frac{H}{c} \right) r \Rightarrow z = \left( \frac{H}{c} \right) r \Rightarrow 0,77 = \frac{77}{3 \cdot 10^5} \cdot r \Rightarrow r = 3000 \text{ Mpc}$$

## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) As diferenças de longitude, em horas, de cada uma das cidades em relação a La Paz ( $\lambda = 68^\circ 08' \text{ W}$ ) é:

- Brasília:  $\Delta\lambda_1 = 68^\circ 08' - 47^\circ 55' = 20^\circ 13' \Rightarrow \Delta\lambda_1 = 1\text{h } 20\text{min } 52\text{s}$
- Montevideú:  $\Delta\lambda_2 = 68^\circ 08' - 56^\circ 10' = 11^\circ 58' \Rightarrow \Delta\lambda_2 = 47\text{min } 52\text{s}$
- Cidade do México:  $\Delta\lambda_3 = 68^\circ 08' - 98^\circ 11' = -30^\circ 03' \Rightarrow \Delta\lambda_3 = -2\text{h } 00\text{min } 12\text{s}$
- Santiago:  $\Delta\lambda_4 = 68^\circ 08' - 70^\circ 39' = -2^\circ 31' \Rightarrow \Delta\lambda_4 = -10\text{min } 04\text{s}$
- Assunção:  $\Delta\lambda_5 = 68^\circ 08' - 57^\circ 27' = 10^\circ 41' \Rightarrow \Delta\lambda_5 = 42\text{min } 44\text{s}$
- Bogotá:  $\Delta\lambda_6 = 68^\circ 08' - 74^\circ 08' = -6^\circ \Rightarrow \Delta\lambda_6 = -24\text{min}$

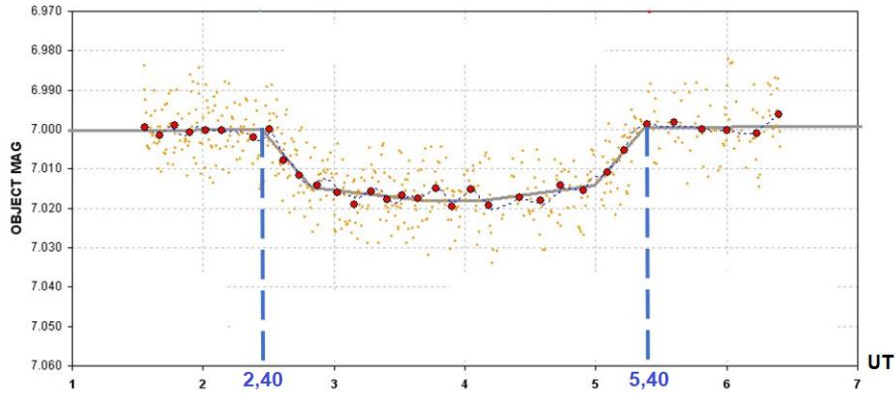
Sabendo que a hora solar verdadeira em La Paz é meio-dia (12h00min00s), temos que neste instante, a hora solar verdadeira em cada uma das cidades valem respectivamente:

- Brasília:  $H_1 = 12\text{h} + 1\text{h } 20\text{min } 52\text{s} \Rightarrow H_1 = 13\text{h } 20\text{min } 52\text{s}$
- Montevideú:  $H_2 = 12\text{h} + 47\text{min } 52\text{s} \Rightarrow H_2 = 12\text{h } 47\text{min } 52\text{s}$
- Cidade do México:  $H_3 = 12\text{h} - 2\text{h } 00\text{min } 12\text{s} \Rightarrow H_3 = 9\text{h } 59\text{min } 48\text{s}$
- Santiago:  $H_4 = 12\text{h} - 10\text{min } 04\text{s} \Rightarrow H_4 = 11\text{h } 49\text{min } 56\text{s}$
- Assunção:  $H_5 = 12\text{h} + 42\text{min } 44\text{s} \Rightarrow H_5 = 12\text{h } 42\text{min } 44\text{s}$
- Bogotá:  $H_6 = 12\text{h} - 24\text{min} \Rightarrow H_6 = 11\text{h } 36\text{min}$

b) Temos que a hora indicada pelo relógio é a hora civil e respeita o horário do meridiano central de fuso. Como La Paz está a  $8^\circ 08'$  a Oeste do meridiano  $60^\circ$  (GMT-4), quando for 12h de tempo solar será **12h 32min 32s** de tempo civil. Portanto, para os demais países, respeitado os respectivos fusos horários, temos:

- Brasília (GMT-3): **13h 32min 32s**
- Montevidéu (GMT-4): **12h 32min 32s**
- Cidade do México(GMT-5): **11h 32min 32s**
- Santiago (GMT-4): **12h 32min 32s**
- Assunção (GMT-4): **12h 32min 32s**
- Bogotá (GMT-5): **11h 32min 32s**

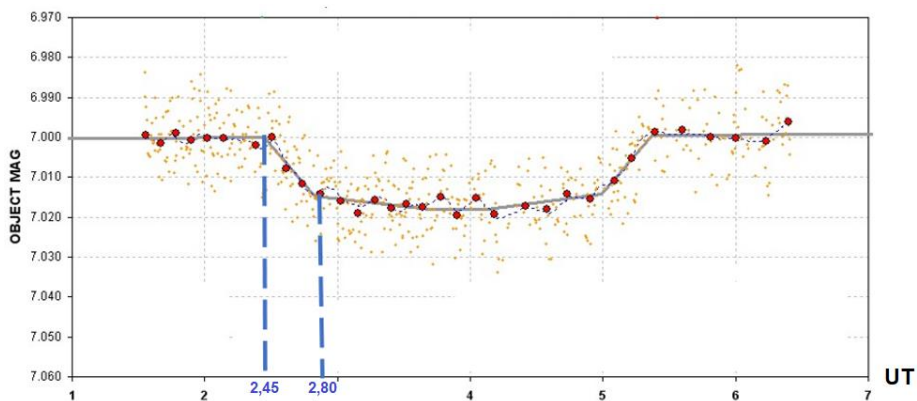
2) a) Analisando do gráfico e respeitando a escala apresentada, temos:



Logo, a duração total do trânsito foi de:

$$d = 5,40 - 2,40 = \boxed{3,00h}$$

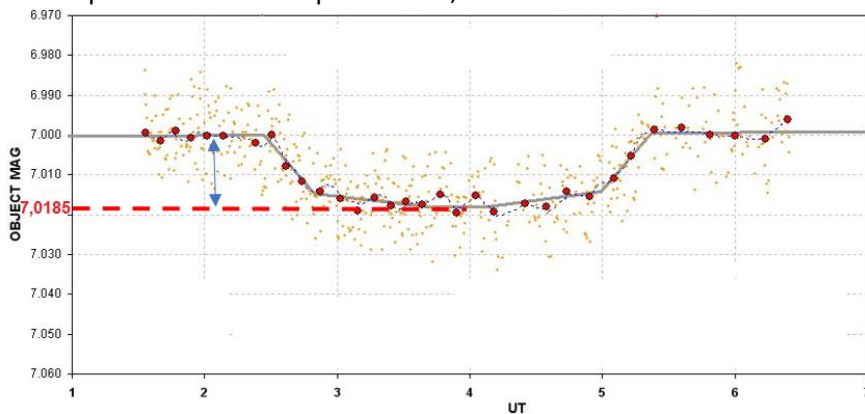
b) Analisando do gráfico e respeitando a escala apresentada, temos:



Logo, tempo de entrada ou saída foi de:

$$t = 2,80 - 2,45 = 0,35h = \boxed{21\text{min}}$$

c) Analisando do gráfico e respeitando a escala apresentada, temos:



Logo, a profundidade da curva de luz é:

$$\Delta m = 7,0185 - 7,000 = \boxed{0,0185}$$

d) Comparando a magnitude da estrela antes do trânsito  $m_1$  e depois do trânsito  $m_2$ , temos que o valor do raio  $r$  do planeta é:

$$\left| \begin{aligned} m_1 - m_2 &= -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \\ F_1 &= \frac{L_1}{A} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{A} \Rightarrow -\Delta m = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow -0,0185 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow \\ F_2 &= \frac{L_2}{A} = \frac{4\pi(R^2 - r^2) \cdot \sigma \cdot T^4}{A} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \frac{R^2}{R^2 - r^2} = 10^{7,4 \cdot 10^{-3}} \Rightarrow r = R \cdot \sqrt{1 - 10^{-7,4 \cdot 10^{-3}}} \Rightarrow r = 0,91.6,995.10^8 \cdot 0,12997 \Rightarrow r = 8,226.10^7 m$$

e) Convertendo  $t$  e  $d$  para segundos, da equação (2), temos que o parâmetro adimensional  $b$  vale:

$$t = d \cdot \frac{r}{R} \cdot \sqrt{1 - b^2} \Rightarrow 1260 = 10800 \frac{8,226.10^7}{0,91.6,995.10^8} \cdot \sqrt{1 - b^2} \Rightarrow b = 0,439$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler na equação (1), temos:

$$\left| \begin{aligned} d &= \frac{PR}{\pi \cdot a} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - \left(\frac{a}{R} \cdot \cos i\right)^2} \\ b &= \frac{a}{R} \cdot \cos i \Rightarrow d^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot \frac{a^3 R^2}{\pi^2 a^2} \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2\right] \Rightarrow d^2 = \frac{4aR^2}{GM} \cdot \left[\left(1 + \frac{r}{R}\right)^2 - b^2\right] \Rightarrow \\ P^2 &= \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3 \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow 10800^2 = \frac{4a(0,91.6,995.10^8)^2}{6,67.10^{-11} \cdot 0,92.1,989.10^{30}} \cdot \left[\left(1 + \frac{8,226.10^7}{0,91.6,995.10^8}\right)^2 - (0,439)^2\right] \Rightarrow a = 8,115.10^9 m \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 0,054 \text{ lua}$$

f) A inclinação  $i$  vale:

$$b \cdot R = a \cdot \cos i \Rightarrow 0,439 \cdot 0,91.6,995.10^8 = 8,115.10^9 \cdot \cos i \Rightarrow i = 88^\circ$$

g) O período orbital  $P$ , tem valor:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{GM} \cdot a^3 \Rightarrow P^2 = \frac{4\pi^2 \cdot (8,115.10^9)^3}{6,67.10^{-11} \cdot 0,92.1,989.10^{30}} \Rightarrow P = 4,155.10^5 s = 4 \text{ dias } 20h$$

3) a) Fazendo a diferença entre os semieixos de dois planetas sucessivos, encontramos os valores: 0,8 ua; 1,6 ua; 3,2 ua; 25,7 ua e 51,2 ua; que pode ser escrito como  $0,8 \cdot 2^n$  com  $\{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 7\}$ . Para termos o primeiro termo ( $n = 0$ ) com valor 1,1 ua, devemos acrescentar à relação 0,3 ua, logo a equação que descreve os semieixos dos planetas é:

$$a = 0,3 + 0,8 \cdot 2^n \quad \{n \in \mathbb{N} \mid 0 \leq n \leq 7\}$$

b) Analisando a tabela e a sequência encontrada, temos que o semieixo maior da órbita do planeta faltante ( $n = 4$ ), é:

$$a = 0,3 + 0,8 \cdot 2^4 \Rightarrow a = 13,1 \text{ ua}$$

Já o seu período orbital  $P$ , será:

$$\frac{P_A^2}{a_A^3} = \frac{P^2}{a^3} \Rightarrow \frac{1,63^2}{1,1^3} = \frac{P^2}{13,1^3} \Rightarrow P = 66,99 \text{ anos}$$

c) Aplicando a 3ª Lei de Kepler, com os dados dos planetas de menor massa  $A$  e maior massa  $E$ , temos que a massa  $M$  da estrela central é:

$$\frac{P_A^2}{a_A^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m_A)} \Rightarrow \frac{(1,63 \cdot 3,15 \cdot 10^7)^2}{(1,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{11})^3} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (M + 0,165 \cdot 5,974 \cdot 10^{24})} \Rightarrow M = 1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

$$\frac{P_E^2}{a_E^3} = \frac{4\pi^2}{G(M + m_E)} \Rightarrow \frac{(185,33 \cdot 3,15 \cdot 10^7)^2}{(25,9 \cdot 1,5 \cdot 10^{11})^3} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (M + 419 \cdot 5,974 \cdot 10^{24})} \Rightarrow M = 1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

Concluimos que a massa dos planetas é muito menor que a massa da estrela central, cujo valor é cerca de  $1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ .

4) a) Considerando o VLS em repouso em relação à Terra, temos que sua velocidade tangencial, paralela à superfície da Terra, no instante do lançamento é igual a velocidade de rotação da Terra na localidade onde se encontra a base, logo:

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 6400}{24} \Rightarrow v = 1600 \text{ km/h}$$

b) **Oeste para Leste.** A partir do enunciado, temos que para colocar um satélite em órbita, é necessário alcançá-lo a velocidade de 27 000 km/h, velocidade esta paralela à superfície terrestre. Como a Terra gira de Oeste para Leste, se lançarmos o VLS neste sentido, por inércia, aproveitaremos sua velocidade de rotação e, conseqüentemente, pouparemos recursos como, por exemplo, propelente.

c) Considerado o arraste mínimo no instante de lançamento, da 2ª Lei de Newton, temos:

$$E - P = m \cdot a \Rightarrow 10 \cdot 10^5 - 5 \cdot 10^5 = 5 \cdot 10^4 \cdot a \Rightarrow a = 10 \text{ m/s}^2$$

d) Analisando a tabela, temos que a massa total inicial do VLS é 50 000 kg e após o fim da queima do propelente do segundo estágio passa a ser 8 391 kg. Portanto, entre estes eventos houve uma variação de massa de 41 609 kg. Essa variação corresponde as massas dos 4 motores do primeiro estágio descartados, considerados iguais de massa total  $M_1$ , a queima do propelente do primeiro estágio, de massa total  $P_1$ , e a queima do propelente do segundo estágio, de massa  $P_2$ , logo:

$$M_1 + P_1 + P_2 = 41609 \text{ kg}$$

O intervalo de tempo entre o início e o fim da queima de propelente do segundo estágio é de 71 s. Como o segundo estágio consome 120 kg de propelente a cada segundo, temos que  $P_2 = 8520 \text{ kg}$ .

Entre o fim da queima do primeiro estágio e a separação do primeiro estágio, houve uma variação de massa de 6000 kg que corresponde ao descarte dos 4 motores, de massa total  $M_1$ , e 2 s da queima do propelente do segundo estágio, ou seja, 240 kg. Portanto,  $M_1 = 5760 \text{ kg}$ .

A partir das conclusões anteriores, temos que a massa de propelente dos 4 propulsores do primeiro estágio é:

$$5760 + P_1 + 8520 = 41609 \Rightarrow P_1 = 27329 \text{ kg}$$

e) Alguns segundos após a separação do terceiro estágio, tem-se o início da manobra de basculamento que ocorre antes da ignição do quarto estágio. Como o VLS não se encontra propulsado durante essa fase, há uma redução de velocidade do conjunto, decorrente da ação da força gravitacional.

**II Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
5 a 10 de setembro de 2010 – Bogotá - Colômbia



**Prova Teórica Individual – Resoluções**

**PROBLEMA 1**

**QUESTÃO 1: ASTRÔNOMO BOGOTANO.**

Pela equação fundamental da Astronomia de posição, temos:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow \alpha = TSL - H$$

Onde  $TSL$  é o tempo (ou hora) sideral local e  $H$  e  $\alpha$  são, respectivamente, o ângulo horário e a ascensão reta da estrela (do astro).

Como é dado o tempo sideral em *Greenwich*, podemos calcular tempo sideral local por:

$$TSL = TSG + \lambda$$

Logo:

$$\alpha = TSL - \lambda - H$$

Convertendo  $H$  e  $\lambda$  em hora e minutos,  $H = 3\text{h } 02\text{min}$  e  $\lambda = -4\text{h } 56\text{min } 20\text{s}$  (negativo por ser longitude Oeste). Assim:

$$\alpha = 12\text{h}30\text{min} - 4\text{h}56\text{min}20\text{s} - 3\text{h}02\text{min} = 4\text{h}31\text{min}40\text{s}$$

$$\alpha = 4\text{h}31\text{min}40\text{s}$$

**QUESTÃO 2: MEDINDO A MASSA DA VIA LÁCTEA.**

Em sua formulação geral, a 3ª Lei que Kepler nos fornece:

$$n^2 a^3 = \mu \Rightarrow \frac{4\pi^2}{P^2} a^3 = G(M + m) \Rightarrow \frac{a^3}{P^2} = \frac{G(M + m)}{4\pi^2}$$

Onde  $n = \frac{2\pi}{P}$  é o movimento médio de um corpo de massa  $m$  orbitando outro de massa  $M$  com um período  $P$  em uma órbita elíptica, ou circular, de semieixo maior  $a$ .  $G$  é a constante gravitacional.

Assumindo que toda a massa,  $M_{VL}$ , da Via Láctea esteja concentrada em seu centro e que a órbita do Sol, cuja massa,  $M_{Sol}$ , é desprezível por pequena ( $M_{Sol} \ll M_{VL}$ ), seja circular ao redor de  $M_{VL}$ , podemos escrever:

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 a^3}{G P^2}$$

Como  $G$  e a massa do Sol são dados na Tabela de Constantes bastaria converter todos os valores para o Sistema Internacional e dividir a massa obtida para a galáxia pela massa do Sol. Neste caso:

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2 a^3}{G m_{Sol} P^2}$$

$$M_{VL} = \frac{4\pi^2(25\,000 \cdot 9,46 \cdot 10^{15})^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30} \cdot (2,5 \cdot 10^8 \cdot 3,15 \cdot 10^7)^2} = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ massas solares}$$

Em Astronomia, o produto  $GM_{Sol}$  é chamado de Constante Gravitacional Heliocêntrica e vale:

$$GM_{Sol} = 4\pi^2 ua^3 \cdot ano^{-2} \cdot M_{Sol}^{-1}$$

A maneira mais segura de se converter o ano-luz para unidades astronômicas é usando o parsec.

$$1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ ua} = 3,26 \text{ anos-luz} \Rightarrow 1 \text{ ano-luz} = 63\,271 \text{ ua}$$

Logo:

$$M_{VL} = \frac{(25\,000 \cdot 63 \cdot 271)^3}{(250\,000\,000)^2} = 6,3 \cdot 10^{10} \text{ massas solares}$$

### QUESTÃO 3: OLHANDO A LUA.

O poder resolutor, ou simplesmente resolução, de um telescópio é a menor distância angular entre duas fontes pontuais para a qual elas continuam separadas e definidas. A expressão da resolução, dada pelo padrão de difração de uma onda de comprimento  $\lambda$  passando por uma abertura de diâmetro  $D$ , é dada pela fórmula de Airy:

$$\text{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D}$$

Assim, a resolução (teórica) de um telescópio óptico com uma objetiva de 5 metros de diâmetro será:

$$\text{sen}\theta = 1,22 \frac{5\,500 \cdot 10^{-10}}{5} = 1,342 \cdot 10^{-7} \Rightarrow \theta = 7,7 \cdot 10^{-6} \text{ graus} = 0,03''$$

Por outro lado, um objeto de 4 m visto a uma distância média de 384 000 km possui um tamanho angular de:

$$\alpha = \frac{4}{3,84 \cdot 10^8} = 1,04 \cdot 10^{-8} \text{ rad} = 0,002''$$

Portanto, **NÃO seria possível distinguir os dois extremos da nave**, pois seu tamanho angular é quase 13 vezes menor do que o que seria possível observar com o telescópio empregado.

Aplicando-se a fórmula de Airy para as dimensões da nave, vemos que seria necessário um telescópio de:

$$D \cong 1,22 \frac{\lambda}{\theta} = 1,22 \cdot \frac{5\,500 \cdot 10^{-10}}{1,04 \cdot 10^{-8}} = 64,5 \text{ m}$$

Logo, seria necessário um telescópio com uma objetiva de diâmetro quase 13 vezes maior que o diâmetro do espelho disponível. Observe que nessa segunda discussão usamos a aproximação de pequenos arcos para a fórmula de Airy:

$$\text{sen}\theta \approx \theta \text{ rad}, \quad \theta \ll 1$$

**PROBLEMA 2: ASTRONÁUTICA – VIAJANDO PARA MERCÚRIO.**

a) A figura fornecida com o enunciado e reproduzida ao lado sugere que se trata de uma trajetória de mínima energia (isto não está descrito no enunciado). Assim sendo, devemos encontrar uma órbita de transferência de Hohmann<sup>2</sup>, uma elipse com o apogeu tangente à órbita da Terra e o perigeu tangente à órbita de Mercúrio.

Caso o leitor esteja familiarizado com as equações do movimento elíptico<sup>3</sup>, poderia tomar, para a órbita de transferência, a equação da velocidade na forma:

$$V^2 = GM_o \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (1)$$

Onde  $a$  é o semieixo maior da órbita de transferência e  $r$  o raio-vetor de posição. Naturalmente estamos desprezando os efeitos gravitacionais das massas dos planetas Terra e Mercúrio. Note que:

$$a = \frac{R_T + R_M}{2}$$

Para a velocidade no apogeu da órbita de transferência, temos que a distância do apogeu será:

$$r_{apo} = R_T$$

Logo:

$$V_{apo} = \sqrt{GM_o \left( \frac{2}{R_T} - \frac{2}{R_T + R_M} \right)} = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} \quad (2)$$

Contudo, a nave, ao partir da Terra, já possui uma velocidade inicial que é a velocidade orbital da Terra:

$$V_T = \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}}$$

Desta forma, a diferença de velocidade que iniciará a manobra de transferência será dada por:

$$\Delta V_T = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} - \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}}$$

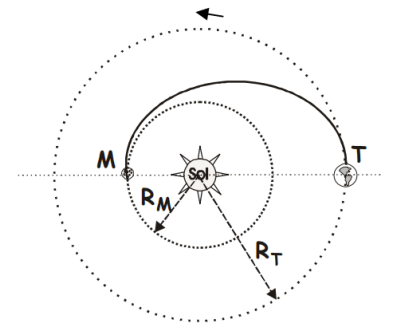
Note que  $\Delta V_T < 0$ , por conta do termo  $R_M/(R_T + R_M)$ . Isto quer dizer que a nave terá que diminuir sua velocidade inicial para percorrer a órbita elíptica de transferência.

b) O tempo,  $t$ , que a nave leva para sair da Terra e chegar a Mercúrio é igual à metade do período,  $P$ , da órbita de transferência e pode ser calculado a partir da 3ª Lei de Kepler:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2} \Rightarrow t = \frac{P}{2} = \pi \sqrt{\frac{a^3}{GM_o}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \pi \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{8GM_o}}$$

c) Como o lançamento deve ser tangente à órbita circular da Terra e em sentido oposto ao movimento,  $\Delta V_T < 0$ , a melhor indicação é que **o lançamento se dê verticalmente sobre a linha do equador às 18h.**



<sup>2</sup> Hohmann, Walter. *The Attainability of Heavenly Bodies*, Washington: NASA Technical Translation F-44, 1960.

<sup>3</sup> Caso o leitor não esteja familiarizado com as equações do movimento elíptico, veja o desenvolvimento para a velocidade na órbita de transferência ao final desta resolução.

## APLICAÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA 2

Embora o problema solicite exprimir os resultados em termos dos raios orbitais, da massa do Sol e da constante gravitacional, é fácil obter resultados numéricos.

Tendo em conta que  $R_T = 1$  ua e  $P_T = 1$  ano, pela 3ª Lei de Kepler têm-se que:

$$\frac{R_T^3}{P_T^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2} = 1 \Rightarrow GM_o = 4\pi^2 \text{ ua}^3 \text{ ano}^{-2} M_o^{-1}$$

Que é a Constante Gravitacional Heliocêntrica, como já foi mostrado anteriormente (v. QUESTÃO 2).

Assim, substituindo o valor dessa constante nas equações obtidas, sabendo ainda que  $R_M = 0,38$  ua (dado não fornecido no enunciado, mas colocamos na Tabela de Constantes), obtemos:

$$a) \Delta V_T = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}} - \sqrt{\frac{GM_o}{R_T}} = 2\pi \left( \sqrt{\frac{2,0,38}{1,38}} - 1 \right) = -1,62 \text{ ua/ano}$$

Usando  $1 \text{ ua} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$  e  $1 \text{ ano} = 365,25 \cdot 24 \cdot 3600 = 31\,557\,600 \text{ s}$ , obtemos, finalmente:

$$\Delta V_T = -7\,698 \text{ m/s} = -7,7 \text{ km/s}$$

$$b) t = \pi \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{8GM_o}} = \sqrt{\frac{(R_T + R_M)^3}{32}} = \sqrt{\frac{1,38^3}{32}} = 0,287 \text{ anos} = 104,7 \text{ dias}$$

## SOLUÇÃO ALTERNATIVA PARA A VELOCIDADE ORBITAL

Dado que a órbita de transferência de Hohmann, uma vez atingida, não receberá mais efeito de forças externas, podemos aplicar a conservação de energia mecânica e momentum angular aos seus pontos extremos (apogeu e perigeu). Assim, pela conservação de energia mecânica:

$$\frac{mV_{apo}^2}{2} - \frac{GM_o m}{R_T} = \frac{mV_{per}^2}{2} - \frac{GM_o m}{R_M} \quad (3)$$

E da conservação do momentum angular:

$$mR_T V_{apo} = mR_M V_{per} \quad (4)$$

Onde  $m$  é a massa da nave.

Substituindo  $V_{per}$  da equação (4) em (3), termos:

$$V_{apo} = \sqrt{\frac{2GM_o R_M}{R_T(R_T + R_M)}}$$

Que é o mesmo resultado obtido na equação (2).

**PROBLEMA 3: A TERRA COMO UM CORPO NEGRO**

A Terra recebe uma potência,  $P_T$ , igual a:

$$P_T = \frac{P_S}{4\pi^2 R_{T-S}^2} \cdot \pi R_T^2 = \frac{P_S}{4} \left( \frac{R_T}{R_{T-S}} \right)^2 \quad (5)$$

Como a Terra, como um corpo negro, está supostamente em equilíbrio térmico, sua potência irradiada será:

$$P_T = \sigma(4\pi R_T^2) T_T^4 \quad (6)$$

Igualando (6) e (5) e efetuando temos:

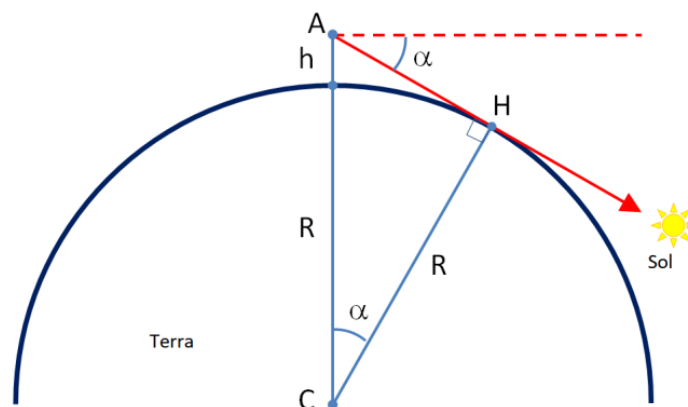
$$T_T^4 = T_S^4 \left( \frac{R_S}{2R_{T-S}} \right)^2 \Rightarrow T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2R_{T-S}}}$$

Substituindo os valores numéricos dados no enunciado, temos, finalmente:

$$T_T = T_S \sqrt{\frac{R_S}{2R_{T-S}}} = 6.000 \sqrt{\frac{6,69 \cdot 10^8}{2 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}}} \Rightarrow T_T = 289 \text{ K}$$

**PROBLEMA 4: EM BUSCA DO SOL**

Sobre a linha do Equador o movimento diurno é perpendicular ao horizonte. Isto quer dizer que somente a altura do Sol irá variar, mantendo o azimute constante. Também, se o andarilho sobe a encosta Norte de uma montanha, apenas sua altitude irá variar e sua distância ao horizonte permanecerá constante. Desta forma, a geometria do problema pode ser resumida na figura abaixo.



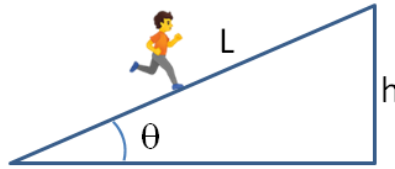
Na figura,  $A$  é a posição do observador a uma altitude  $h$ , que observa o Sol sob um ângulo de altura  $\alpha$  que tangencia o horizonte em  $H$ . Da geometria da figura temos:

$$R = (R + h) \cos \alpha \Rightarrow h = R \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$$

Como  $\alpha \ll 1 \Rightarrow \cos \alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \dots$ , então:

$$h \approx \frac{R\alpha^2}{2}$$

Por outro lado, para o andarilho atingir a altitude  $h$  ele precisa percorrer um acive de comprimento  $L$  mostrado na figura a seguir:



Logo:

$$L = \frac{h}{\text{sen}\theta} = \frac{R\alpha^2}{2\text{sen}\theta} \quad (7)$$

Na medida em que o Sol vai baixando, em decorrência da rotação da Terra, o ângulo  $\alpha$  precisa aumentar com a ascensão do andarilho pela encosta da montanha. Assim:

$$\alpha = \omega(t - t_0) \quad (8)$$

Onde  $\omega$  é a velocidade angular da Terra e  $t_0$  é o momento em que o andarilho inicia a ascensão.

Assim, substituindo a equação (8) em (7) temos:

$$L = \frac{R\omega^2(t-t_0)^2}{2\text{sen}\theta} \quad (9)$$

A expressão (9) é a equação de um movimento acelerado de  $L_0 = 0$  em  $t_0$  até  $L$  em  $t$  com aceleração igual a:

$$a = \frac{R\omega^2}{\text{sen}\theta}$$

A velocidade com que o andarilho deve subir a encosta da montanha com uma aceleração  $a$  para manter o Sol sempre no horizonte será:

$$v = at = \frac{R\omega^2}{\text{sen}\theta} t$$

Ou seja:

$$t = \frac{v\text{sen}\theta}{R\omega^2}$$

Substituindo os valores numéricos para  $R$ ,  $\omega$  e  $\theta$ , obtemos:

$$t = \frac{v\text{sen}\theta}{R\omega^2} = \frac{0,1736}{6,37 \cdot 10^6 \cdot \left(\frac{2\pi}{24 \cdot 3600}\right)^2} v = 5,16v \text{ s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = 5,16 v \text{ segundos}$$

Como nenhum outro dado foi fornecido no enunciado, a resposta teve que ser dada em função de  $v$ .

Por outro lado, podemos considerar que a velocidade média de caminhada de um adulto saudável é cerca de 5 a 6 km/h, ou seja, entre 1,4 e 1,7 m/s. Já um atleta pode correr cerca de 10 m/s. Adotando um valor médio de  $v = 5$  m/s, obtemos:

$$t = 5,16 \cdot 5 = 25,8 \text{ s}$$

## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

### PROBLEMA 1

#### QUESTÃO 1:

1.1. O viajante acha-se sobre a linha do Equador com o Sol em seu zênite. Logo, o Sol encontra-se sobre o Equador celeste em algum equinócio. Para manter o Sol sempre no zênite, desprezando o movimento em declinação do Sol, que nesta época é máximo, basta o viajante compensar o movimento diurno do Sol **movendo-se de Leste para Oeste** a uma velocidade de:

$$v = \frac{2\pi R_{Terra}}{P_{Terra}} = \frac{2\pi \cdot 6,4 \cdot 10^6}{24 \cdot 3,6 \cdot 10^3} = \boxed{465,4 \text{ m/s}}$$

1.2. A velocidade do som é dada na tabela de constantes como sendo 340 m/s. Desta forma, dividindo o resultado obtido anteriormente por este valor, temos:

$$\frac{v}{v_{som}} = \frac{465,4}{340} = \boxed{1,37 \text{ vezes}}$$

1.3. O viajante teria que se deslocar a uma velocidade de 1,37 vezes a velocidade do som, ou seja, 1,37 Mach (Mach 1,37). **O veículo apropriado para essa velocidade é um avião supersônico.**

1.4. Na Lua, o que determina a posição do Sol em relação à sua superfície é o MÊS SINÓDICO LUNAR, já que sua rotação é síncrona com seu período de translação ao redor da Terra.

Pela Tabela de Constantes, vemos que  $P_{sinódico} = 29,5 \text{ dias}$ . Assim:

$$v = \frac{2\pi R_{Lua}}{P_{Tsinódico}} = \frac{2\pi \cdot 1,74 \cdot 10^6}{29,5 \cdot 24 \cdot 3,6 \cdot 10^3} = \boxed{4,29 \text{ m/s}}$$

#### QUESTÃO 2:

Esta questão é facilitada pelo fato de constar na Tabela de Constantes o valor de 200 km para o diâmetro da sombra da Lua sobre a superfície da Terra.

Em relação ao Sol a Lua se move, de Oeste para Leste, aproximadamente  $\frac{360^\circ}{29,5 \text{ dias}} = 12,2^\circ/\text{dia} = 2,465 \cdot 10^{-6} \text{ rad/s}$ . Isto implica que a sombra projetada da Lua sobre a superfície da Terra se move, também de Oeste para Leste, com uma velocidade de:

$$v_s = 3,84 \cdot 10^8 \cdot 2,465 \cdot 10^{-6} = 946,6 \text{ m/s}$$

Por outro lado, como a Terra gira de Oeste para Leste, vemos que um ponto sobre o Equador se desloca a uma velocidade de cerca de  $v = 465,4 \text{ m/s}$ . Ou seja, a velocidade efetiva com que a sombra da Lua percorreria a linha do Equador durante um eclipse hipotético seria de aproximadamente:

$$v_{sombra} = 946,6 - 465,4 = 481,1 \text{ m/s}$$

Como ambas as velocidades estão no mesmo sentido, de Oeste para Leste, a progressão da sombra da Lua sobre a superfície da Terra também será de Oeste para Leste.

A distância da Terra à Lua não foi dada na Tabela de Constantes. Desta forma, teríamos que empregar um raciocínio simplificado, considerando apenas a rotação da Terra.

Finalmente, o tempo máximo de um eclipse seria dado pelo tempo em que o diâmetro do círculo de sombra avançasse sobre o observador situado na linha do Equador terrestre.

Felizmente, a Tabela de Constantes fornece um valor para o diâmetro do círculo de sombra projetado pela Lua como sendo de  $D = 200$  km.

Sendo assim, a sombra do eclipse solar percorreria um ponto sobre o Equador no tempo de:

$$t_{m\acute{a}x} = \frac{200\,000}{481,1} = 415,7\,s \Rightarrow t_{m\acute{a}x} = 6,9\,min$$

Utilizando o raciocínio simplificado sugerido pelo enunciado esse tempo máximo seria de:

$$t_{m\acute{a}x} = \frac{200\,000}{465,4} = 429,7\,s \Rightarrow t_{m\acute{a}x} = 7,2\,min$$

## **PROBLEMA 2**

2.1. A questão pede apenas uma análise qualitativa do problema descrito pela figura, que representa a secção equatorial do planeta.

A velocidade de escape de um corpo sujeito à atração gravitacional de outro corpo de massa  $M$  e distante  $r$  é:

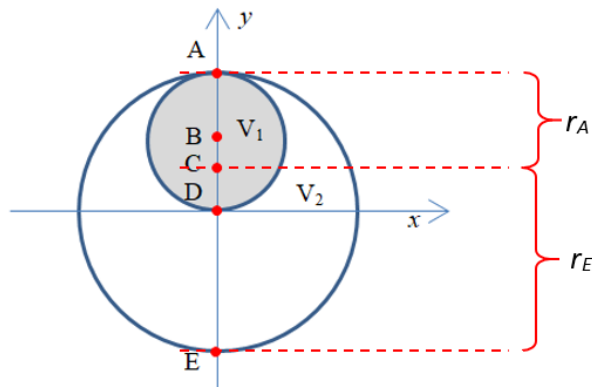
$$v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Ou seja, quanto maior for a distância ao centro de massa, menor será a velocidade de escape.

Seja  $M_1$  a massa da esfera de densidade  $\rho_1 = 2\rho$  e raio  $R_1 = R/2$ , e  $M_2$  a massa da esfera de densidade  $\rho_2 = \rho$  e raio  $R_2 = R$ , descontada a cavidade de raio  $R_1$ . Assim:

$$\begin{cases} M_1 = \rho_1 V_1 = 2\rho \frac{4\pi}{3} \left(\frac{R}{2}\right)^3 = \rho \frac{\pi R^3}{3} \\ M_2 = \rho_2 (V_2 - V_1) = \rho \frac{4\pi}{3} \left[ R^3 - \left(\frac{R}{2}\right)^3 \right] = \rho \frac{7\pi R^3}{6} \end{cases}$$

Como  $M_1 > M_2$  o centro de massa do planeta (C) está em algum ponto entre o centro geométrico do planeta (D) e o centro geométrico da cavidade (B) (veja figura).



Logo, como  $r_A < r_E$ , a velocidade de escape será menor no **ponto da superfície oposto ao centro geométrico da cavidade**, ou seja, no ponto  $E$  do esquema.

2.2. Neste caso basta somar as massas  $M = M_1 + M_2$ , pois o centro de massa do planeta coincidirá com seu centro geométrico e, em seguida, aplicar a fórmula da velocidade de escape. Assim:

$$M = \rho \frac{\pi R^3}{3} + \rho \frac{7\pi R^3}{6} = \rho \frac{3\pi R^3}{2}$$

$$v_{esc} = R\sqrt{3\pi\rho G}$$

**PROBLEMA 3**

**QUESTÃO 1:**

Seja  $F_o$  o brilho do Sol (fluxo) sem a mancha e  $F$  o brilho do Sol com a mancha. Os fluxos serão proporcionais às áreas então:

$$\frac{F}{F_o} = \frac{A}{A_o}$$

Mas:

$$\begin{cases} A_o = \pi R^2 \\ A = \pi R^2 - \pi \frac{R^2}{16} = \frac{15}{16} \pi R^2 \end{cases}$$

Então:

$$\frac{F}{F_o} = \frac{\frac{15}{16} \pi R^2}{\pi R^2} = \frac{15}{16}$$

Da relação entre fluxo e magnitude, temos:

$$\frac{F}{F_o} = 10^{\frac{2}{5}(m_o - m)} = \frac{15}{16} \Rightarrow \frac{2}{5}(m_o - m) = \log\left(\frac{15}{16}\right) \Rightarrow \Delta m = (m_o - m) = \frac{5}{2} \log\left(\frac{15}{16}\right)$$

$$\Delta m = -0,07$$

Onde o sinal negativo apenas indica que  $m > m_o$ .

**QUESTÃO 2:**

2.1. Uma vez que as velocidades implicadas são muito menores que a velocidade da luz no vácuo, i.e.  $v \ll c$ , podemos usar a fórmula do Efeito Doppler não relativístico:

$$\frac{v}{c} = \frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_o}$$

Onde  $\lambda_0$  representa o comprimento de onda em repouso da linha observada,  $v$  a velocidade da fonte e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. Por convenção, quando a fonte se afasta  $v > 0 \Rightarrow \lambda > \lambda_0$  e o comprimento de onda indica um desvio para o vermelho.

- Cálculo da velocidade de rotação no equador solar:

No equador do Sol  $\Delta\lambda = 0,045 \text{ \AA}$  e, pela Tabela de Constantes,  $\lambda_{H\alpha} = 6\,563 \text{ \AA}$ . Logo:

$$v_{eq} = \frac{0,045 \cdot 3 \cdot 10^5}{6\,563} \Rightarrow v_{eq} = 2,06 \text{ km/s}$$

- Cálculo da velocidade de rotação do Sol ao longo do paralelo de  $60^\circ$ :

No paralelo de  $60^\circ$ ,  $\Delta\lambda = 0,019 \text{ \AA}$ . Logo:

$$v_{60} = \frac{0,019 \cdot 3 \cdot 10^5}{6\,563} \Rightarrow v_{60} = 0,87 \text{ km/s}$$

2.2. Usando:

$$v = \frac{2\pi R}{P} \Rightarrow P = \frac{2\pi R}{v}$$

Onde  $R$  é o Raio do paralelo de latitude correspondente do Sol e  $P$  o referido período, temos:

- Cálculo do período de rotação no equador solar:

Pelos dados da Tabela de Constantes,  $R_{Sol} = 7 \cdot 10^5 \text{ km}$ , então:

$$P_{eq} = \frac{2\pi R_{Sol}}{v_{eq}} = \frac{2\pi \cdot 7 \cdot 10^5}{2,06} = 2,13 \cdot 10^6 \text{ s} \Rightarrow P_{eq} = 24,7 \text{ dias}$$

- Cálculo do período de rotação do Sol ao longo do paralelo de  $60^\circ$  :

O raio do paralelo de  $60^\circ$  é  $R_{60} = R_{Sol} \cos 60^\circ$ , então:

$$P_{60} = \frac{2\pi R_{Sol} \cdot \cos 60^\circ}{v_{60}} = \frac{\pi \cdot 7 \cdot 10^5}{0,87} = 2,53 \cdot 10^6 \text{ s} \Rightarrow P_{60} = 29,3 \text{ dias}$$

2.3. Pode-se deduzir que o Sol não rotaciona como um corpo rígido, uma vez que é um corpo gasoso, e que sua velocidade de rotação diminui como aumento da latitude.

III Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica  
23 a 30 de outubro de 2011 – Passa Quatro – Brasil



Prova Teórica Individual – Resoluções

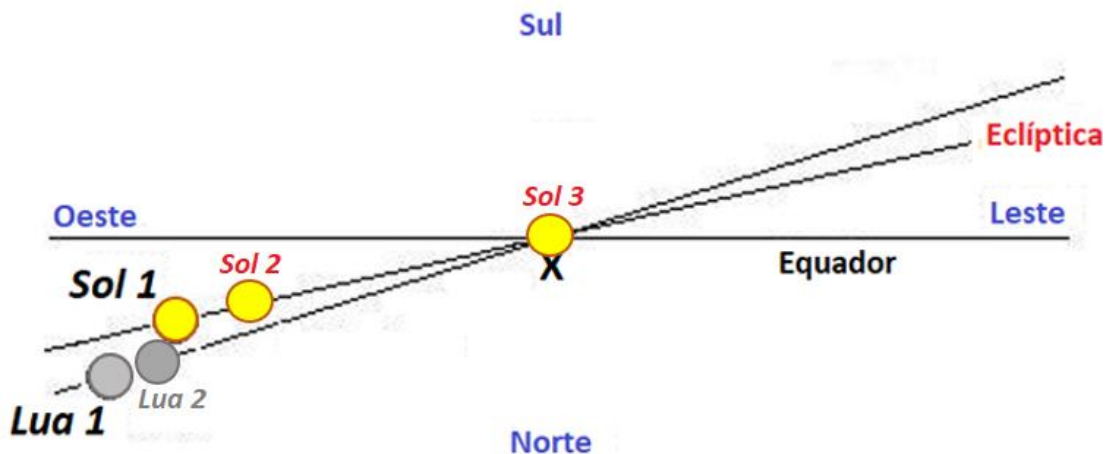
**Questão 1)** a) O Sol caminha aproximadamente  $1^\circ$  por dia (24h) na eclíptica. Tomando a posição *Sol 1* como referência, seu centro precisa se deslocar dois diâmetros (para Leste) para atender aquele valor.

b) Do centro de *Sol 1* até o ponto *X*, equinócio, cabem  $\sim 9$  diâmetros solares, ou seja  $9 \times 0,5^\circ = 4,5^\circ$ , que correspondem a 4,5 dias, visto que o Sol percorre  $\sim 1^\circ$  por dia na eclíptica.

c) Primavera. A passagem do Sol pelo equador do hemisfério Norte para o do Sul se define como o início da primavera para o hemisfério Sul. Ocorre em torno de 22 de setembro.

d) *Lua 2* tangente e à Leste de *Lua 1*, pois o movimento da Lua é direto como o do Sol e da ordem de  $0,5^\circ$  por hora no céu. O nodo descendente da órbita da Lua é o ponto *X*, pois a Lua ali passa do Norte para o Sul da eclíptica.

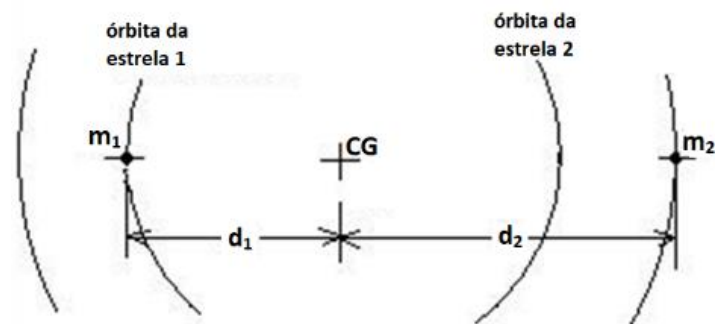
e) 11 horas. A distância do centro de *Lua 1* até *X* (nodo) é de  $\sim 11$  diâmetros lunares. Como a Lua caminha  $\sim 0,5^\circ$  por hora no céu levará 11 h para atingir o ponto *X*.



**Questão 2)** Representando esquematicamente o sistema binário, temos que a distância  $d = d_1 + d_2$ , entre as duas estrelas é:

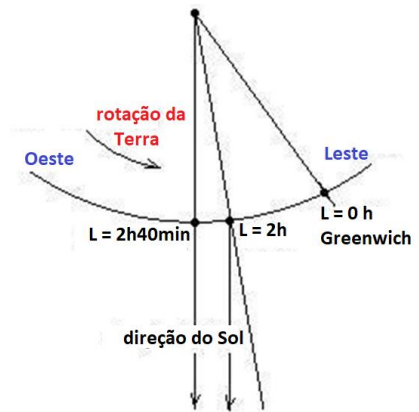
$$m_1 \cdot d_1 = m_2 \cdot d_2 \Rightarrow 2m_2 \cdot 2 = m_2 \cdot d_2 \Rightarrow d_2 = 4 \text{ ua}$$

$$d = d_1 + d_2 = 2 + 4 \Rightarrow d = 6 \text{ ua}$$



**Questão 3)** a) Estando o Sol no meridiano do lugar de 2h 40min Oeste, como a longitude de 2h Oeste está a Leste da primeira, ele seria visto 40 min a Oeste do meridiano da longitude de 2h. Como a resposta é pedida em graus, faz-se a conversão de cada grau correspondendo a 4 min, o que dá  $(40\text{min}/4\text{min}) \times 1^\circ = 10^\circ$ .

b) Como representado no esquema ao lado, temos que o Sol estará a **Oeste**.



**Questão 4)** Lua Cheia em Virgem (particularmente sobre um equinócio) significa Sol na posição oposta no céu, em Peixes (sobre o outro equinócio). Esse outro equinócio, quando o Sol caminha no zodíaco do hemisfério Sul para o do Norte, caracteriza o início do **Outono** para o hemisfério Sul.

**Questão 5)** a) Considerando que as áreas coletoras são proporcionais ao quadrado do diâmetro, temos:

$$\frac{A_{\text{luneta}}}{A_{\text{olho}}} = \left(\frac{D_{\text{luneta}}}{D_{\text{olho}}}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_{\text{luneta}}}{A_{\text{olho}}} = \left(\frac{6}{0,6}\right)^2 \Rightarrow \frac{A_{\text{luneta}}}{A_{\text{olho}}} = 100$$

b) Comparando a observação do mesmo astro (mesma luminosidade) da equação fundamental das magnitudes, temos que a magnitude limite da luneta é:

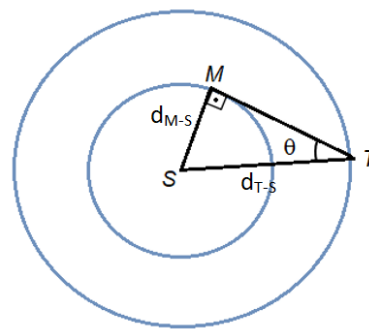
$$m_{\text{luneta}} - m_{\text{olho}} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_{\text{luneta}}}{F_{\text{olho}}}\right) \Rightarrow m_{\text{luneta}} - m_{\text{olho}} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L}{\pi R_{\text{luneta}}^2} \cdot \frac{\pi R_{\text{olho}}^2}{L}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{\text{luneta}} - m_{\text{olho}} = -5 \log\left(\frac{R_{\text{olho}}}{R_{\text{luneta}}}\right) \Rightarrow m_{\text{luneta}} - 6 = -5 \log\left(\frac{0,3}{3}\right) \Rightarrow m_{\text{luneta}} = 11$$

**Questão 6)** Considerando a situação de alongação máxima de Mercúrio, esquematicamente, temos:

$$\text{sen}\theta = \frac{d_{M-S}}{d_{T-S}} \Rightarrow \text{sen}23^\circ = \frac{d_{M-S}}{d_{T-S}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{M-S} = 0,39 \cdot d_{T-S}$$



**Questão 7)** a) Substituindo a Terra por Urano, mantendo sua distância em relação ao Sol (1 ua), da 3ª Lei de Kepler teríamos que o novo período orbital de Urano seria a **1 ano**.

b) Considerando que a força gravitacional entre a Urano e a Terra é igual a força entre a Terra e a Lua, temos:

$$F_{U-T} = F_{T-L} \Rightarrow \frac{GM_U M_T}{d_{U-T}^2} = \frac{GM_T M_L}{d_{T-L}^2} \Rightarrow d_{U-T} = d_{T-L} \sqrt{\frac{M_U}{M_L}} = 3,84 \cdot 10^5 \cdot \sqrt{\frac{14,5 \cdot 10^{24}}{7,36 \cdot 10^{22}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_{U-T} = 1,29 \cdot 10^7 \text{ km}$$

c) Da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G.(M_U + M_T)} \Rightarrow \frac{P^2}{(1,29 \cdot 10^{10})^3} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 15.597 \cdot 10^{24}} \Rightarrow P = 1,19 \cdot 10^8 s = \boxed{1378 \text{ dias}}$$

**Questão 8)** a) i) A massa total,  $m_{total}$  é dada por:

$$m_{total} = m_{propelente} + m_{estrutura} + m_{satélite}$$

A partir do enunciado e da tabela tem-se:

$$m_{total} = 41602 + 8298 + 100 = 50000 \text{ kg}$$

A relação entre a massa de propelente e a massa total é dada por:

$$\frac{m_{propelente}}{m_{total}} = \frac{41602}{50000} = 0,83 = \boxed{83\%}$$

ii) A relação entre a massa do satélite e a massa total é:

$$\frac{m_{satélite}}{m_{total}} = \frac{100}{50000} = 0,002 = \boxed{0,2\%}$$

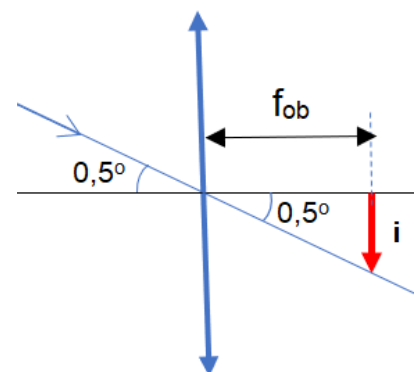
b) De acordo com o enunciado  $\Delta v_{real} = 0,8 \cdot \Delta v_{teórico}$ . Analisando a tabela, temos que  $\Delta v_{teórico} = 9\,565 \text{ m/s}$ , portanto:

$$\Delta v_{real} = 0,8 \cdot 9595 = 7652 \text{ m/s} \cdot 3,6 \Rightarrow \boxed{\Delta v_{real} = 27547 \text{ km/h}}$$

### Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) Considerando que a imagem ( $i$ ) da Lua é formada no plano focal da objetiva do telescópio, e utilizando a aproximação imposta no enunciado ( $\text{tg}0,5^\circ = 0,01$ ), temos:

$$\text{tg}0,5^\circ = \frac{i}{f_{ob}} \Rightarrow i = f_{ob} \cdot \text{tg}0,5^\circ = 10 \cdot \text{tg}0,5^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow i = 100,01 \Rightarrow \boxed{i = 1 \text{ m} = 10 \text{ cm}}$$



b) Lembrando que o Sol tem diâmetro de  $0,5^\circ$  e o furo está a uma distância de  $d = 10 \text{ cm}$  do chão, temos que a altura  $h$  do telhado é:

$$\text{tg}0,5^\circ = \frac{d}{h} \Rightarrow h = \frac{10}{\text{tg}0,5^\circ} = \frac{10}{0,01} = 1000 \text{ cm} \Rightarrow \\ \Rightarrow \boxed{h = 10 \text{ m}}$$

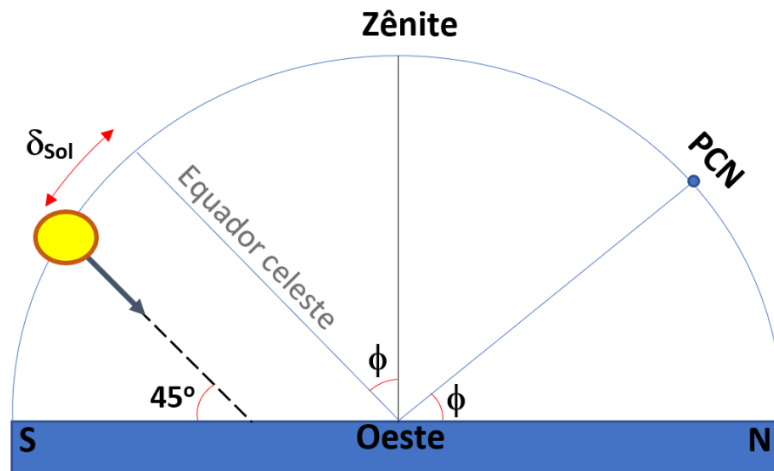
2) a) Sabendo que o Sol cruza o meridiano superior local ( $H = 0$ ) em um solstício boreal ( $\alpha_{sol} = 18 \text{ h}$ ), temos que o tempo sideral local (TSL) é:

$$TSL = H + \alpha = 0 + 18 \text{ h} \Rightarrow \boxed{TSL = 18 \text{ h}}$$

b) Como o relógio do marinheiro registra o tempo solar verdadeiro, ao observar o Sol cruzando o meridiano superior local o mesmo deve registrar **12 h**.

c) Sabendo que o marinheiro está a latitude  $\lambda = 32^\circ W$ , temos que o Sol passou  $2^\circ$  (8 min) do meridiano central de fuso ( $30^\circ$ ), logo a Hora Legal para o marinheiro é 12h 08min. Em *Greenwich* serão 2 horas a mais. Portanto, a Hora Legal em *Greenwich* é **14h 08min**.

d) O marinheiro observa o pôr do Sol (horizonte Oeste) durante o solstício boreal ( $\delta_{Sol} = -23^\circ 27'$ ). Do esquema, temos que o marinheiro está em algum ponto do hemisfério Norte. Estimando que a trajetória aparente do Sol neste dia está inclinada  $45^\circ$  em relação ao horizonte, temos que a latitude ( $\phi$ ) do lugar é:



$$\phi + |\delta_{Sol}| + 45^\circ = 90^\circ \Rightarrow \phi = 45^\circ - 23^\circ 27' \Rightarrow \phi = 21^\circ 33' N$$

3) Sendo  $d_{T-L}$  a distância Terra-Lua, temos que o diâmetro angular aparente  $\theta$  da Terra para um observador na Lua é:

$$\text{tg}\theta = \frac{2.R_{Terra}}{d_{T-L}} = \frac{2.6400}{384000} \Rightarrow \text{tg}\theta = 0,033 \Rightarrow \theta = 1,91^\circ$$

Ou seja, aproximadamente **4 vezes maior** do que um observador na Terra vê a Lua Cheia.

4) a) A coloração se deve à refração e à dispersão da luz do Sol na atmosfera da terra que desvia os maiores comprimentos de onda para dentro da região da umbra.

b) Você veria a Terra em frente ao Sol, ou seja, um eclipse solar para o observador na Lua. Além disso, veria um brilho avermelhado entorno da Terra devido à refração e à dispersão dos maiores comprimentos de onda da luz na atmosfera terrestre. (Sugestão: veja a animação em <https://youtu.be/MN5BMLGBah0>).

5) a) Da definição de fluxo de radiação ( $\phi$ ) apresentada no enunciado, temos que a energia coletada pelo radiotelescópio de Arecibo, em 1 h, ao observar Cygnus A é:

$$\phi = \frac{E}{\Delta t.A.f} \Rightarrow 4200.10^{-26} = \frac{E}{3600\pi.150^2.430.10^6} \Rightarrow E = 4,593.10^{-6} J$$

b) Para cedermos uma lâmpada de 100 W por 1 segundo, precisamos de 100 J. Logo, o tempo  $\Delta t'$  de observação de Cygnus A, com o mesmo radiotelescópio, para coletarmos 100 J é:

$$\Delta t' = \frac{100 J}{4,593.10^{-6} J} \Rightarrow \Delta t' = 2,177.10^7 h \Rightarrow \Delta t' = 2485 \text{ anos}$$

c) O fluxo de radiação, coletado em Arecibo, da Radiação Cósmica de Fundo em micro-ondas é:

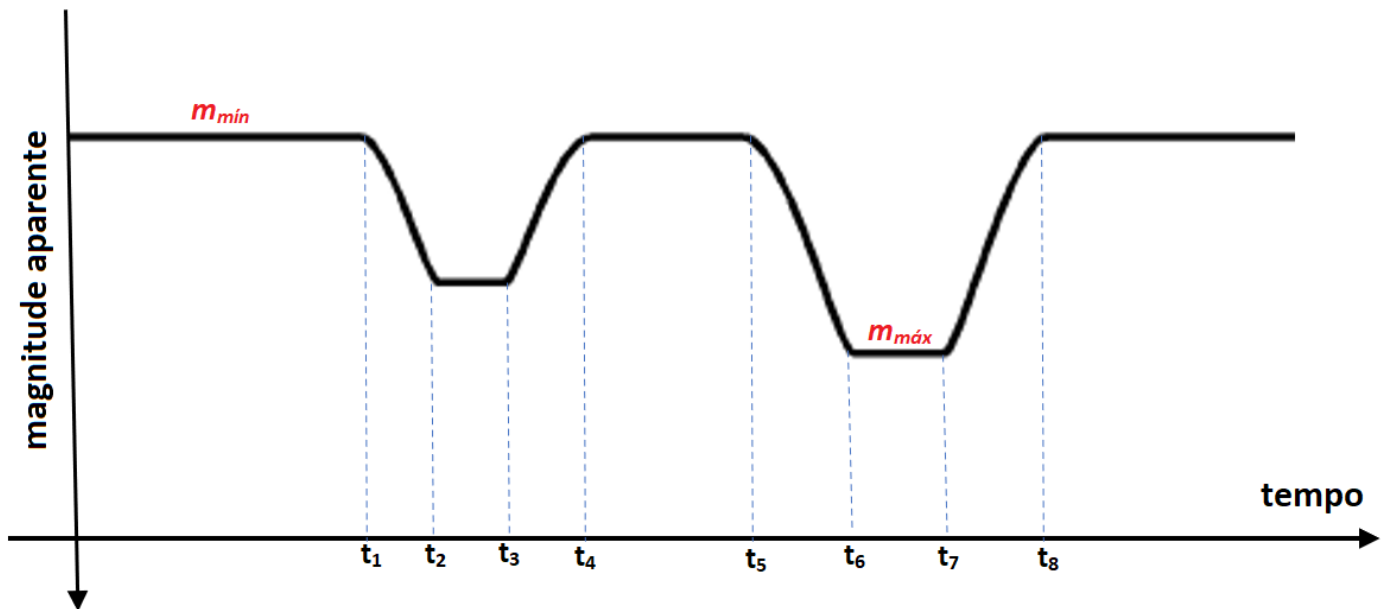
$$\phi' = \frac{P}{A \cdot f} = \frac{10^{-18}}{\pi \cdot 150^2 \cdot 100 \cdot 10^9} \Rightarrow \phi' = 1,41 \cdot 10^{-34} \frac{W}{m^2 \cdot Hz} = 1,4 \cdot 10^{-8} Jy$$

Como o fluxo coletado da Radiação Cósmica de Fundo é muito menor quando comparada com a de Cygnus A, temos que o tempo necessário para coletar 100 J será muito maior do que a expectativa de vida do ser humano.

6) a) A magnitude mínima ( $m_{\min}$ ) do sistema, ou seja, situação de maior brilho, ocorre quando não há eclipse e a luminosidade do sistema é máxima  $L_{\max} = 3L_0 + L_0 = 4L_0$ . Já a situação de magnitude máxima ( $m_{\max}$ ), ou seja, situação de menor brilho, ocorre durante o eclipse da estrela 2 (menor raio) pela estrela 1 (maior raio); neste caso a luminosidade será mínima será  $L_{\min} = 3L_0$ . Portanto, da equação geral das magnitudes, temos:

$$m_{\max} - m_{\min} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_{\min}}{L_{\max}}\right) = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{3L_0}{4L_0}\right) \Rightarrow m_{\max} - m_{\min} = 0,312$$

b) A variação da magnitude do sistema ao longo de um período é representada no gráfico abaixo. O intervalo de tempo entre os instantes  $t_1-t_2$ ,  $t_2-t_3$ ,  $t_3-t_4$  são **iguais** e representa o eclipse 1 pela estrela 2. Já os intervalos  $t_5-t_6$ ,  $t_6-t_7$ ,  $t_7-t_8$ , também são iguais e representa o eclipse da estrela 2 pela estrela 1.



7) a) Considerando as órbitas dos satélites circulares, temos:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{GM}{15R+R}}}{\sqrt{\frac{GM}{3R+R}}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{4}{16}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = 0,5$$

b) Da 3ª Lei de Kepler, temos que a relação entre os períodos orbitais dos dois satélites é:

$$\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3} \Rightarrow \frac{P_1^2}{(3R + R)^3} = \frac{P_2^2}{(15R + R)^3} \Rightarrow P_1^2 = \left(\frac{4}{16}\right)^3 \Rightarrow P_1 = \frac{P_2}{8}$$

Logo, quando o satélite 2 completar 1 volta, o satélite 1 terá completado **8 voltas**.

8) a) Analisando apenas a tabela temos que:

- Cidades a 1 500 km de Assunção: La Paz e Santiago.
- Cidades a 2 000 km de La Paz: Porto Alegre, Presidente Prudente e Santiago.
- Cidades a 2 000 km de Porto Alegre: La Paz, Porto Seguro e Santiago.

Logo, a única cidade que atende aos três requisitos é **Santiago**.

b) Representando processo de trilateração no mapa, vem:



**IV Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
 09 a 15 de setembro de 2012 – Barranquilla – Colômbia



**Prova Teórica Individual – Resoluções**

1) a) O Sol está cruzando o meridiano local mais próximo ao ponto cardinal Norte, logo  $A = 0^\circ$ .

b) No solstício de junho a declinação do Sol é aproximadamente  $\delta = +23^\circ 27'$ .

c) No solstício de junho a ascensão reta do Sol é  $\alpha = 6h$ .

d) Como o Sol está cruzando o meridiano local, o ângulo horário é  $H = 0$ .

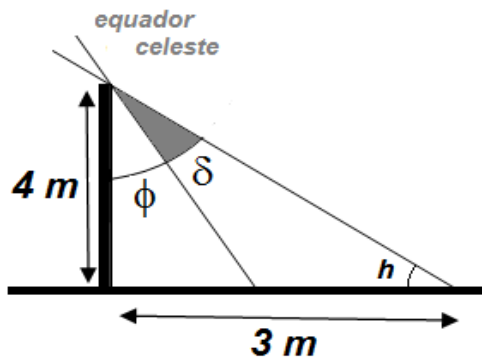
e) O tempo sideral local será:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow \boxed{TSL = 6h}$$

f) A altura  $h$  do Sol será dada por:

$$\operatorname{tg} h = \frac{4}{3} \Rightarrow \boxed{h = 53^\circ 7' 48,4''}$$

g) Analisando a figura, temos que a latitude  $\phi$  será:



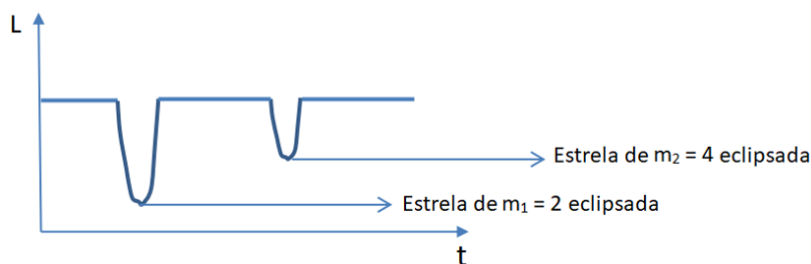
$$\left| \begin{array}{l} \operatorname{tg}(\phi + \delta) = \frac{3}{4} \Rightarrow \boxed{\phi = 13^\circ 25' 12'' S} \\ \delta = 23^\circ 27' \end{array} \right.$$

2) a) Sendo  $m_1 = 2$  e  $m_2 = 4$ , da equação de Pogson, temos:

$$m_1 - M_1 = 5 \log d - 5 \Rightarrow 2 - M_1 = 5 \log 35 - 5 \Rightarrow \boxed{M_1 = -0,72}$$

$$m_2 - M_2 = 5 \log d - 5 \Rightarrow 4 - M_2 = 5 \log 35 - 5 \Rightarrow \boxed{M_2 = 1,28}$$

b)



c) Da equação geral das magnitudes, temos que a relação entre os fluxos das estrelas  $m_2$  e  $m_1$  é:

$$m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_2}{F_1}\right) \Rightarrow 4 - 2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_2}{F_1}\right) \Rightarrow \frac{F_2}{F_1} = 0,158$$

Logo, a magnitude total aparente do sistema,  $m_T$ , em situação que não há eclipse é:

$$m_T - m_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_T}{F_1}\right) \Rightarrow m_T - m_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_1 + F_2}{F_1}\right) \Rightarrow m_T - 2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{1,158.F_1}{F_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{m_T = 1,84}$$

3) a) Assumindo o centro do Sol como referência do sistema ( $x_1 = 0$ ), da definição de centro de massa para corpos pontuais, temos:

$$X_{CM} = \frac{M_{Sol} \cdot x_1 + M_{Júp} \cdot x_2}{M_{Sol} + M_{Júp}} \Rightarrow X_{CM} = \frac{M_{Sol} \cdot 0 + M_{Júp} \cdot (8 \cdot 10^{11})}{100 M_{Júp}} \Rightarrow \boxed{X_{CM} = 8 \cdot 10^8 m}$$

b) Considerando a massa de Júpiter desprezível em relação a massa do Sol, da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$P^2 = a^3 \Rightarrow P^2 = \left(\frac{8 \cdot 10^{11}}{1,5 \cdot 10^{11}}\right)^3 \Rightarrow \boxed{P = 12,32 \text{ anos}}$$

c) Considerando um ponto a distância  $d$  do Sol para a qual a força gravitacional de Júpiter é igual a força gravitacional exercida pelo Sol, temos:

$$F_{Sol} = F_{Júp} \Rightarrow \frac{GM_{Sol} \cdot m}{d^2} = \frac{GM_{Júp} \cdot m}{(8 \cdot 10^{11} - d)^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{1000M_{Júp}}{d^2}} = \sqrt{\frac{M_{Júp}}{(8 \cdot 10^{11} - d)^2}} \Rightarrow \frac{31,62}{d} = \frac{1}{8 \cdot 10^{11} - d} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d = 7,75 \cdot 10^{11} m}$$

4) a) Convertendo as informações para o Sistema Internacional de Unidades, temos:

$$\phi = 750 \frac{lb}{s} = 750 \cdot \frac{(0,453kg)}{s} \Rightarrow \boxed{\phi = 339,75 \frac{kg}{s}}$$

$$v = 12500 \frac{ft}{s} = 12500 \cdot \frac{(0,305m)}{s} \Rightarrow \boxed{v = 3812,5 \frac{m}{s}}$$

b) Considerando que os três motores são idênticos, temos que a cada segundo o sistema queima uma massa de:

$$\Delta m = 339,75 kg \cdot 3 \Rightarrow \Delta m = 1019,25 kg$$

Portanto, o impulso total que os três motores fornecem à nave é:

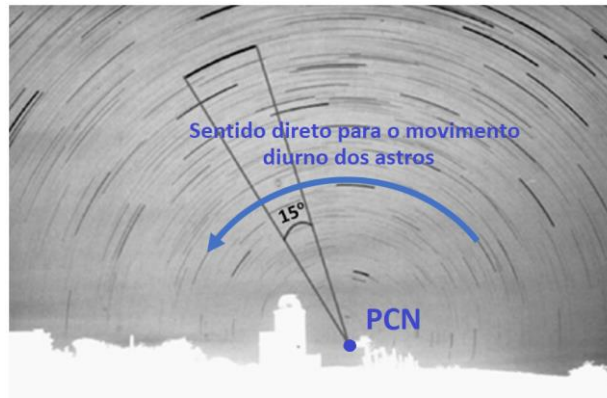
$$I = \Delta p = \Delta m \cdot v \Rightarrow I = 1019,25 \cdot 3812,5 \Rightarrow \boxed{I = 3,89 \cdot 10^6 \frac{kg \cdot m}{s}}$$

5) a) Como o observador está com o polo celeste Norte acima do horizonte, concluímos que ele se encontra no hemisfério terrestre Norte.

b) Considerando que o período de rotação da Terra é de 24 h, temos que o tempo total de exposição da foto foi:

$$t = \frac{24h}{360^\circ} \cdot 15^\circ \Rightarrow \boxed{t = 1h}$$

c)



d) Sabendo que o diâmetro do Sol é  $1,391 \cdot 10^9$  m, temos que o comprimento  $d$  do filamento é:

$$d = \frac{1,391 \cdot 10^9}{32,1'} \cdot 13,2' \Rightarrow d = 5,72 \cdot 10^8 \text{ m}$$

6) a) Sendo  $\lambda_1$  o comprimento de onda associado a linha contínua, e  $\lambda_2$  o comprimento de onda associado a linha tracejada, da equação fundamental da ondulatória, temos:

$$c = \lambda_1 \cdot f_1 \Rightarrow 3 \cdot 10^8 = \lambda_1 \cdot 456,79 \cdot 10^9 \Rightarrow \lambda_1 = 6,567 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

$$c = \lambda_2 \cdot f_2 \Rightarrow 3 \cdot 10^8 = \lambda_2 \cdot 457,09 \cdot 10^9 \Rightarrow \lambda_2 = 6,563 \cdot 10^{-4} \text{ m}$$

b) Da equação do Efeito Doppler, vem:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{6,563 \cdot 10^{-4} - 6,567 \cdot 10^{-4}}{6,567 \cdot 10^{-4}} = \frac{v}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow v = -182,73 \text{ km/s}$$

Temos então que o módulo da velocidade de ejeção é 182,73 km/s, aproximando-se do planeta Terra.

## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) Considerando um ponto na superfície de Betelgeuse, temos que o fluxo total pode ser estimado por:

$$F_{tot} = \frac{L_{Bet}}{4\pi \cdot R_{Bet}^2} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot L_{Sol}}{4\pi \cdot (10^3 \cdot R_{Sol})^2} \Rightarrow F_{tot} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (10^3 \cdot 6,955 \cdot 10^8)^2} \Rightarrow F_{tot} = 7,505 \cdot 10^6 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

b) Nas condições impostas, temos:

$$F_{Bet} = \frac{L_{Bet}}{4\pi \cdot d^2} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot L_{Sol}}{4\pi \cdot d^2} \Rightarrow F_{Bet} = \frac{1,2 \cdot 10^5 \cdot 3,8 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot \left(\frac{197,3086 \cdot 10^{16}}{100}\right)^2} \Rightarrow F_{Bet} = 9,823 \cdot 10^{-4} \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

c) Da equação geral das magnitudes, temos:

$$m_{Bet} - m_{Sol} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_{Bet}}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow m_{Bet} + 26,72 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{9,823 \cdot 10^{-4}}{1,366 \cdot 10^3}\right) \Rightarrow m_{Bet} = -11,36$$

d) O raio de Betelgeuse, em ua, é:

$$R_{Bet} = \frac{10^3 \cdot R_{Sol}}{1,5 \cdot 10^{11}} = \frac{10^3 \cdot 6,995 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{11}} \Rightarrow R_{Bet} = 4,67 \text{ ua}$$

O primeiro planeta do Sistema Solar que estaria fora do raio de Betelgeuse seria Júpiter, pois o seu semieixo orbital é cerca de 5,2 ua.

2) a) Da 3ª Lei de Kepler, vem:

$$\begin{cases} \frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \\ T^2 = C \cdot \frac{R^3}{M} \end{cases} \Rightarrow C = \frac{4\pi^2}{G} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow C = 5,913 \cdot 10^{11} \frac{\text{kg}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

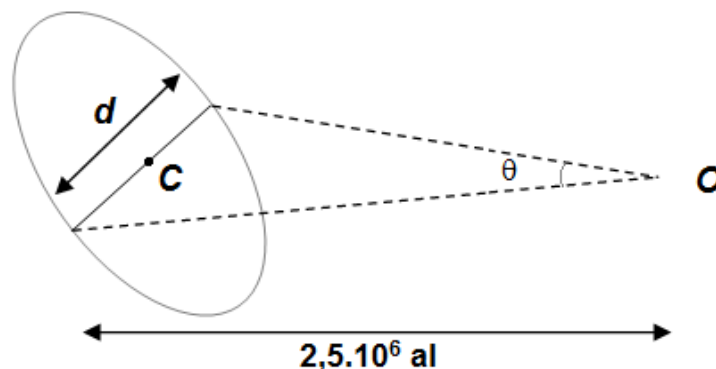
b) Sendo  $R_1$ , o raio orbital do satélite entorno de Saturno, da 3ª Lei de Kepler, vem:

$$T_1^2 = C \cdot \frac{R_1^3}{M_{Sat}} \Rightarrow (234,01 \cdot 24 \cdot 3600)^2 = 5,913 \cdot 10^{11} \cdot \frac{R_1^3}{95,97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow R_1 = 7,319 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,048 \text{ ua}$$

c) Sendo  $T_{Lua}$  o novo período da Lua entorno da Terra, da 3ª Lei de Kepler, temos:

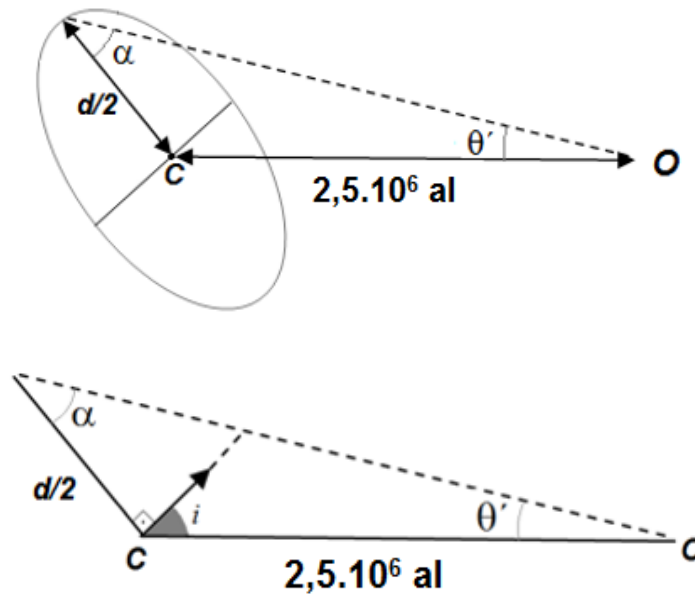
$$T_{Lua}^2 = C \cdot \frac{R_{Lua}^3}{M_{Terra}} \Rightarrow T_{Lua}^2 = 5,913 \cdot 10^{11} \cdot \frac{(3,84 \cdot 10^8)^3}{3,5 \cdot 10^{24}} \Rightarrow T_{Lua} = 1,367 \cdot 10^6 \text{ s} = 15,82 \text{ dias}$$

3) a) Sendo  $d$  o diâmetro da galáxia, analisando a figura, temos:



$$\text{tg} \theta = \frac{d}{2,5 \cdot 10^6} \Rightarrow d = 2,5 \cdot 10^6 \cdot \text{tg} 3,2^\circ \Rightarrow d = 1,396 \cdot 10^5 \text{ al}$$

b) Aplicando a Lei dos senos, vem:



$$\frac{2,5 \cdot 10^6}{\text{sen} \alpha} = \frac{6,99 \cdot 10^4}{\text{sen} 0,5^\circ} \Rightarrow \alpha = 18,18^\circ$$

Portanto:

$$\alpha + \theta' + i = 90^\circ \Rightarrow i = 71,32^\circ$$

c) A velocidade de recessão desta galáxia é:

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{6556,22 - 6562,80}{6562,80} = \frac{v}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow v = -300,79 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

Já o módulo do parâmetro z:

$$|z| = \frac{v}{c} \Rightarrow |z| = 10^{-3}$$

d) A magnitude absoluta  $M$  da galáxia é:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 4,36 - M = 5 \log \left( \frac{2,5 \cdot 10^6}{3,26} \right) - 5 \Rightarrow M = -20,06$$

e) A magnitude limite deste telescópio é:

$$m_{lim} = 7,1 + 5 \log d \Rightarrow m_{lim} = 13,63$$

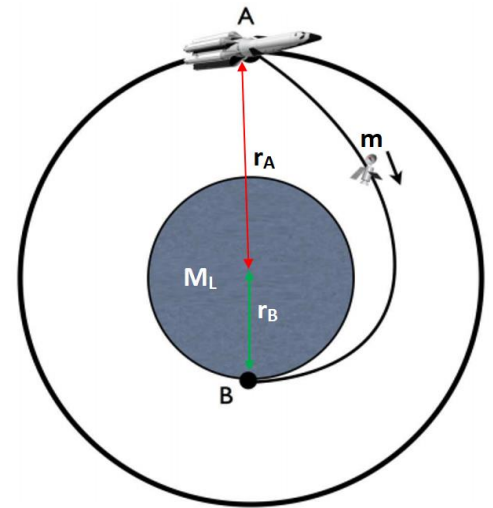
Portanto, como  $m < m_{lim}$ , será possível observar a galáxia com este telescópio.

4) a) Sabendo que a órbita na nave espacial é circular, temos:

$$v_{nave} = \sqrt{\frac{GM_{Lua}}{R_L + h}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22}}{1,74 \cdot 10^6 + 1,0 \cdot 10^6}} \Rightarrow v_{nave} = 1342 \text{ m/s}$$

b) Da conservação do momento angular e também da energia, a velocidade  $v_S$  com que a sonda deve sair da nave, em relação a Lua, é:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} m \cdot v_S \times r_A &= m \cdot v_B \times r_B \\ \frac{m \cdot v_S^2}{2} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_A} &= \frac{m \cdot v_B^2}{2} - \frac{G \cdot M_L \cdot m}{r_B} \Rightarrow \end{aligned} \right\} \\ & \Rightarrow \left. \begin{aligned} v_B &= \frac{r_A \cdot v_S}{r_B} \\ v_S^2 - v_B^2 &= 2GM_L \cdot \left( \frac{r_B - r_A}{r_A \cdot r_B} \right) \Rightarrow v_S = \sqrt{\frac{2GM_L \cdot r_B}{r_A \cdot (r_B + r_A)}} \Rightarrow \end{aligned} \right\} \\ & \Rightarrow v_S = \sqrt{\frac{2,6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 7,4 \cdot 10^{22} \cdot 1,74 \cdot 10^6}{2,74 \cdot 10^6 \cdot (1,74 \cdot 10^6 + 2,74 \cdot 10^6)}} \Rightarrow v_S = 1183 \text{ m/s} \end{aligned}$$



Antes de calcular a velocidade que se deve impulsionar a sonda, em relação

a nave, recordemos que a velocidade orbital da nave é dada por  $v_{nave} = \sqrt{\frac{GM_L}{R_L + h}}$ . Comparando as duas equações,

vemos que  $v_{nave} > v_S$ , logo a sonda deverá ser freada, isto é, a sonda deve ser lançada em direção oposta a velocidade orbital da nave. Então:

$$v_A = v_{nave} - v_S = 1342 - 1183 \Rightarrow v_A = 160 \text{ m/s}$$

c) A velocidade  $v_B$  com que a sonda atinge a superfície lunar é:

$$v_B = \frac{r_A \cdot v_S}{r_B} = \frac{2,74 \cdot 10^6 \cdot 1183}{1,74 \cdot 10^6} \Rightarrow v_B = 1863 \text{ m/s}$$

**V Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**

19 a 23 de outubro de 2013 – Cochabamba – Bolívia



**Prova Teórica Individual - Resoluções**

1) Da 3ª Lei de Kepler e da definição de densidade, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2} \\ d = \frac{M}{V} \\ V = \frac{4}{3} \pi R^3 \end{array} \right. \Rightarrow d \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{P^2} \Rightarrow d = \frac{3\pi a^3}{G R^3 P^2} = \boxed{10216 \frac{km}{m^3}}$$

2) Sendo  $t$  a idade do universo, para  $\lambda_{m\acute{a}x} = 700 \text{ nm}$ , temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_{m\acute{a}x} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \\ T = \frac{k}{\sqrt{t}} \\ k = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ k.s}^{1/2} \end{array} \right. \Rightarrow 700 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{1,5 \cdot 10^{10}}{\sqrt{t}} = 2,898 \cdot 10^{-3} \Rightarrow t = 1,31 \cdot 10^{13} \text{ s} = \boxed{4,16 \cdot 10^5 \text{ anos}}$$

3) a) Como a paralaxe de Vega é  $0,129''$ , temos:

$$d = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,129} \Rightarrow d = 7,75 \text{ pc} \Rightarrow \boxed{d = 25,27 \text{ al}}$$

b) Como Vega é uma estrela com classe espectral A0 (classificação de Harvard) ela é **branca**. Já pela classificação MK, temos que Vega é classificada como V o que indica sua posição na **sequência principal** do diagrama HR.

c) Da equação de Pogson, temos:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 0,03 - M = 5 \log 7,75 - 5 \Rightarrow \boxed{M = 0,58}$$

d) Comparando a magnitude absoluta de Vega com o Sol, da equação geral das magnitudes, temos:

$$M - M_{Sol} = -\frac{5}{2} \cdot \log \left( \frac{L}{L_{Sol}} \right) \Rightarrow 0,58 - 4,72 = -\frac{5}{2} \cdot \log \left( \frac{L}{L_{Sol}} \right) \Rightarrow \boxed{\frac{L}{L_{Sol}} = 45,29}$$

e) Comparando o raio de Vega com o raio do Sol, temos:

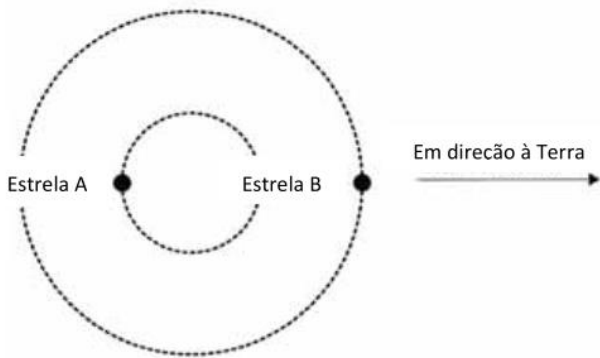
$$\frac{L}{L_{Sol}} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi R_{Sol}^2 \cdot \sigma \cdot T_{Sol}^4} \Rightarrow \frac{L}{L_{Sol}} = \left( \frac{R}{R_{Sol}} \right)^2 \cdot \left( \frac{T}{T_{Sol}} \right)^4 \Rightarrow 45,29 = \left( \frac{R}{R_{Sol}} \right)^2 \cdot \left( \frac{10000}{5778} \right)^4 \Rightarrow \boxed{\frac{R}{R_{Sol}} = 2,25}$$

f) Considerando  $L \propto M^3$ , temos:

$$\frac{L}{L_{Sol}} = \left( \frac{M}{M_{Sol}} \right)^3 \Rightarrow 45,29 = \left( \frac{M}{M_{Sol}} \right)^3 \Rightarrow \frac{M}{M_{Sol}} = 3,56 \Rightarrow M = 3,56 \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \Rightarrow \boxed{M = 7,09 \cdot 10^{30} \text{ kg}}$$

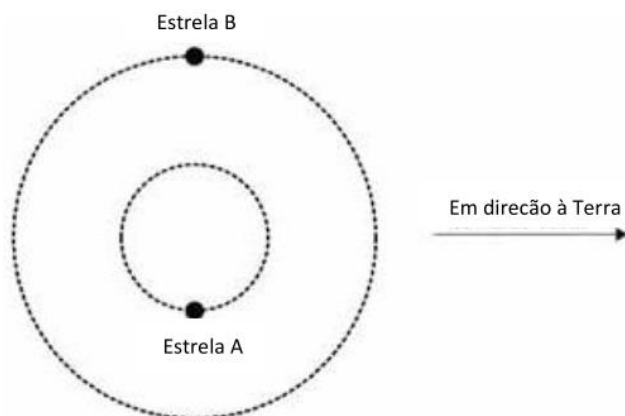


7) a)



Nesta configuração, as estrelas possuem velocidades perpendiculares à direção da Terra. Portanto, neste instante, não há afastamento ou aproximação com a Terra para detectarmos o efeito Doppler.

b)



Estrela A:

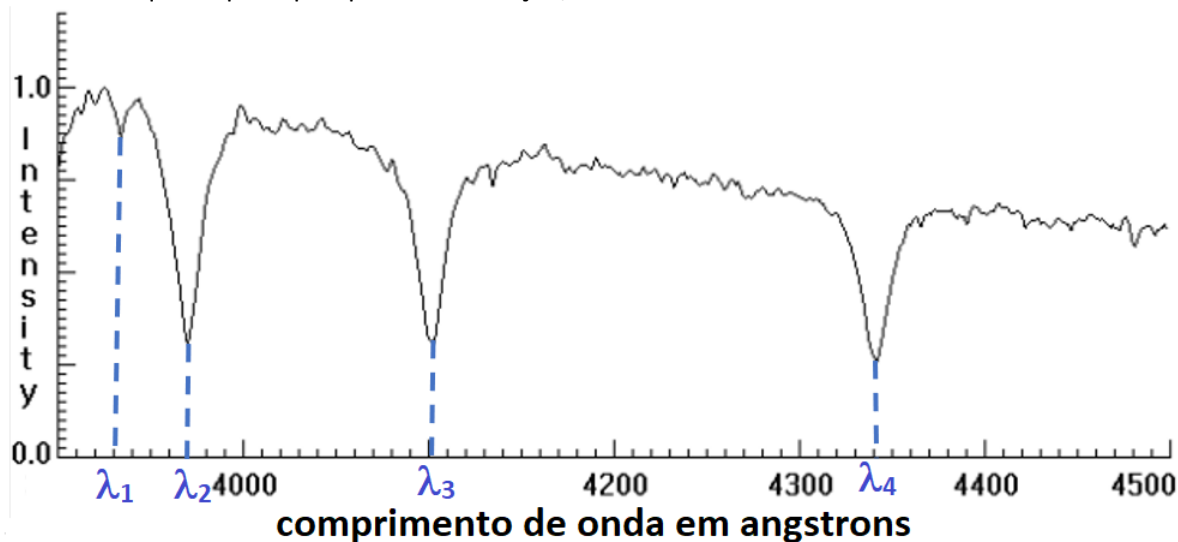
$$\frac{\Delta\lambda_A}{\lambda_A} = \frac{v_A}{c} \Rightarrow \frac{(6,5 - 6,58) \cdot 10^{-7}}{6,58 \cdot 10^{-7}} = \frac{v_A}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow v_A = -3,647 \cdot 10^6 \text{ m/s (aproximação)}$$

Estrela B:

$$\frac{\Delta\lambda_B}{\lambda_B} = \frac{v_B}{c} \Rightarrow \frac{(6,76 - 6,58) \cdot 10^{-7}}{6,58 \cdot 10^{-7}} = \frac{v_B}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow v_B = 8,206 \cdot 10^6 \text{ m/s (afastamento)}$$

### Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) Analisando os quatro principais picos de absorção, temos:



$$\lambda_1 = 3930 \text{ \AA} \quad \text{Ca II}$$

$$\lambda_2 = 3970 \text{ \AA} \quad \text{H I (H \epsilon)}$$

$$\lambda_3 = 4100 \text{ \AA} \quad \text{He II}$$

$$\lambda_4 = 4340 \text{ \AA} \quad \text{H I (H \gamma)}$$

b) Comparando os picos de absorção com os espectros típicos para cada classe espectral, concluímos que a estrela pertence ao tipo espectral **A**. A presença de linhas de absorção do hidrogênio dominantes e metais fracamente ionizados, reforçam a justificativa.

c) Analisando o gráfico, temos que a intensidade máxima ( $I_{\text{máx}} = 1$ ) ocorre para o comprimento de onda  $\lambda_{\text{máx}} = 3920 \text{ \AA}$ , portanto, aplicando a Lei de Wien, temos:

$$\lambda_{\text{máx}} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m.K} \Rightarrow 3920 \cdot 10^{-10} \cdot T = 2,898 \cdot 10^{-3} \Rightarrow T = 7393 \text{ K}$$

d) Como a temperatura é baixa para uma estrela de classe espectral A (~11 000 K a ~7500 K), podemos classificá-la como A10 = F0. Portanto, sua magnitude absoluta é  $M = 2,6$ . Da equação de Pogson, temos:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow 9,5 - 2,6 = 5 \log d - 5 \Rightarrow d = 239,88 \text{ pc}$$

2) a) Considerando que o raio orbital, soma do raio da Terra mais a altura em relação a superfície, triplicou, a variação da energia mecânica do satélite será:

$$\Delta E_{\text{mec}} = -\frac{GMm}{2r_f} + \frac{GMm}{2r_i} = \frac{GMm}{2} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{3r_i} \right) \Rightarrow \Delta E_{\text{mec}} = \frac{GMm}{2} \cdot \frac{2}{3r_i} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{mec}} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 6 \cdot 10^{24} \cdot 3 \cdot 10^2}{3 \cdot (6,4 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5)} = 5,8 \cdot 10^9 \text{ J}$$

b) Como a massa do satélite é muito menor que a massa da Terra, da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{r_f^3} \Rightarrow \frac{P_i^2}{r_i^3} = \frac{P_f^2}{(3r_i)^3} \Rightarrow \frac{P_i}{P_f} = 0,19$$

c) Para escapar da órbita, é necessário que  $\Delta E_{\text{mec}} = 0 \Rightarrow K = -U$ , então:

$$\frac{m \cdot v_{\text{esp}}^2}{2} = -\left( -\frac{GMm}{r} \right) \Rightarrow v_{\text{esp}} = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Portanto:

$$\frac{v_{\text{esp } i}^2}{v_{\text{esp } f}^2} = \frac{\frac{2GM}{r_i}}{\frac{2GM}{3r_i}} \Rightarrow \frac{v_{\text{esp } i}}{v_{\text{esp } f}} = \sqrt{3}$$

3) a) Considerando  $k$  e  $c$  constantes, da definição de luminosidade, temos:

$$\left| \begin{array}{l} L = \frac{E}{t} \Rightarrow M^4 \propto \frac{kMc^2}{t} \Rightarrow t \propto M^{-3} \\ L \propto M^4 \end{array} \right.$$

b) Duplicando a massa da estrela, a razão  $t'/t$ , entre os tempos de vida será:

$$\frac{t'}{t} = \left( \frac{2M}{M} \right)^{-3} \Rightarrow \frac{t'}{t} = 0,125$$

Ou seja, o tempo de vida reduz **8 vezes**.

4) a) Sendo  $MM$ , a massa molar da estrela, da equação de estado para um gás ideal, temos:

$$p.V = n.k.T \Rightarrow p \cdot \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{M}{MM} \cdot k.T \Rightarrow pR^3 \propto MT$$

b) Considerando que a área superficial da estrela é  $A = 4\pi R^2$ , da definição de pressão média, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} p = \frac{F}{A} \\ F \propto \frac{M^2}{R^2} \end{array} \right. \Rightarrow p \propto \frac{M^2}{R^2} \cdot \frac{1}{4\pi R^2} \Rightarrow p \propto \frac{M^2}{R^4}$$

c) Comparando os resultados dos itens a e b, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} pR^3 \propto MT \\ p \propto \frac{M^2}{R^4} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{M^2}{R^4} \cdot R^3 \propto MT \Rightarrow T \propto \left(\frac{M}{R}\right)^1$$

Logo, a constante  $a$  de proporcionalidade é  $a = 1$ .

d) Considerando a densidade  $\rho$  da estrela constante, temos:

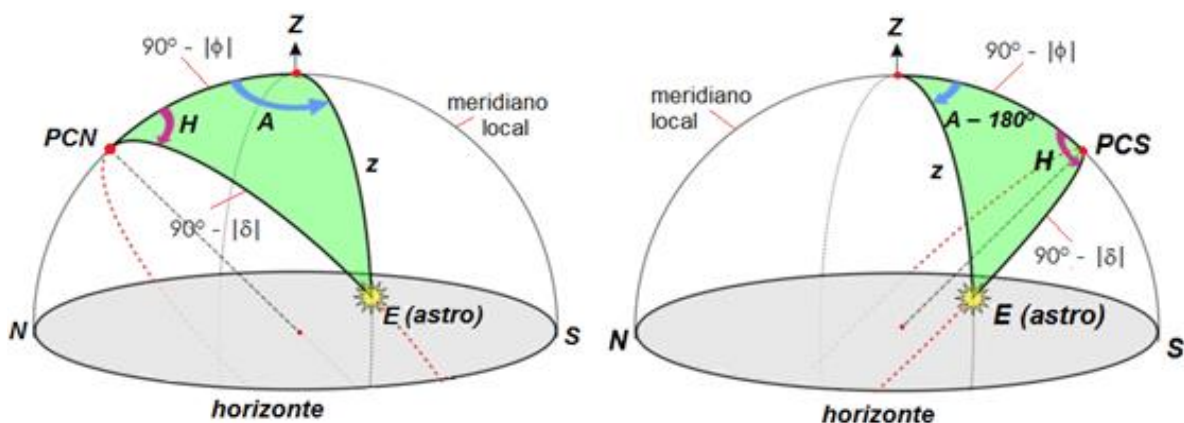
$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3} \pi R^3} \Rightarrow R^3 = \frac{3M}{4\pi\rho} \Rightarrow R \propto M^{\frac{1}{3}}$$

Da equação de Stefan-Boltzmann, temos:

$$L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \Rightarrow L \propto R^2 \cdot T^4 \Rightarrow L \propto R^2 \cdot \left(\frac{M}{R}\right)^4 \Rightarrow L \propto \frac{M^4}{R^2} \Rightarrow L \propto \frac{M^4}{\left(M^{\frac{1}{3}}\right)^2} \Rightarrow L \propto M^{\frac{10}{3}}$$

Logo, a constante  $b$  de proporcionalidade é  $b = 3,3$ . Usualmente, aproxima-se este valor para  $3,5$ .

5) a) A partir da Lei dos cossenos para os triângulos esféricos, pode-se estabelecer as seguintes relações:



Triângulo de posição para um observador no hemisfério Norte e outro no hemisfério Sul.

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos(90^\circ - |\phi|) \cdot \cos(90^\circ - |\delta|) + \sin(90^\circ - |\phi|) \cdot \sin(90^\circ - |\delta|) \cdot \cos H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos z = \sin|\phi| \cdot \sin|\delta| + \cos|\phi| \cdot \cos|\delta| \cdot \cos H \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos H = \cos z \cdot \sec|\phi| \cdot \sec|\delta| - \operatorname{tg}|\phi| \cdot \operatorname{tg}|\delta| \end{aligned}$$

Para o nascer ou ocaso, temos  $z = 90^\circ$ , logo:

$$\cos H = \cos 90^\circ \cdot \sec|\phi| \cdot \sec|\delta| - \operatorname{tg}|\phi| \cdot \operatorname{tg}|\delta| \Rightarrow \boxed{\cos H = -\operatorname{tg}\phi \cdot \operatorname{tg}\delta}$$

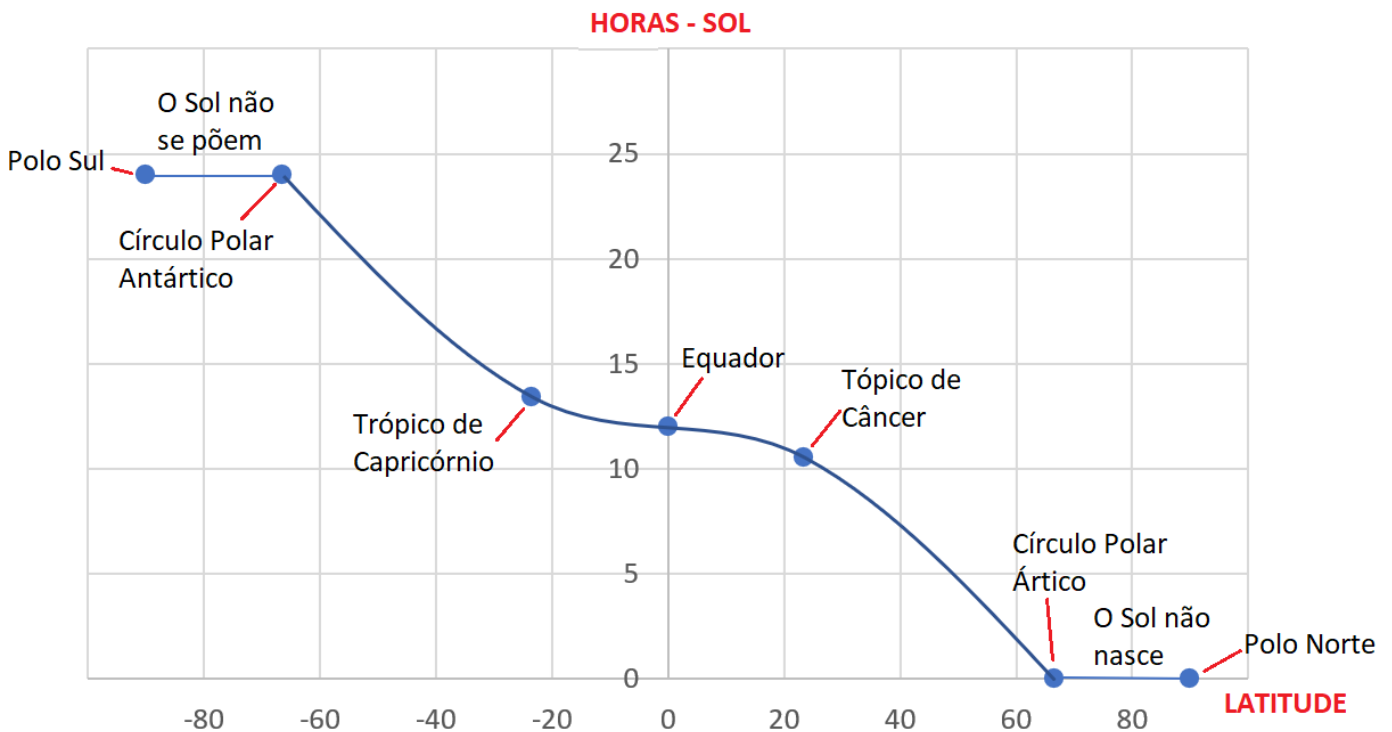
b) Considerando a situação de solstício de verão para o hemisfério Sul ( $\delta_{Sol} = -23^\circ 27'$ ), temos que o ângulo horário de ocaso do Sol  $H_1$ , no trópico de Capricórnio ( $\phi_1 = -23^\circ 27'$ ) e  $H_2$  no trópico de Câncer ( $\phi_2 = +23^\circ 27'$ ), nesta data valem:

$$\begin{aligned} \cos H_1 &= -\operatorname{tg}\phi_1 \cdot \operatorname{tg}\delta_{Sol} = -\operatorname{tg}(-23^\circ 27') \cdot \operatorname{tg}(-23^\circ 27') \Rightarrow H_1 = 100,84^\circ = 6,72 h \\ \cos H_2 &= -\operatorname{tg}\phi_2 \cdot \operatorname{tg}\delta_{Sol} = -\operatorname{tg}(23^\circ 27') \cdot \operatorname{tg}(-23^\circ 27') \Rightarrow H_2 = 79,15^\circ = 5,28 h \end{aligned}$$

Como o tempo de permanência do astro acima do horizonte é igual a duas vezes o ângulo horário de ocaso, temos que o tempo que o Sol ficará acima do horizonte em cada uma das localidades é:

$$\boxed{t_1 = 2 \cdot H_1 = 13,44 h} \quad \text{e} \quad \boxed{t_2 = 2 \cdot H_2 = 10,56 h}$$

c) Organizando os dados, temos:



## VI Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

10 a 16 de outubro de 2014 – Montevideu – Uruguai

## Prova Teórica Individual – Resoluções



## PROBLEMA I

Alternativa E

Sendo  $n$  o número de crateras e  $A$  a área em cada região, da definição de fluxo apresentada no enunciado, temos:

$$F_A = F_B \Rightarrow \frac{n_A}{A_A \cdot \Delta t_A} = \frac{n_B}{A_B \cdot \Delta t_B} \Rightarrow \frac{3200}{9 \cdot 10^5 \cdot \Delta t_A} = \frac{2000}{1,2 \cdot 10^6 \cdot \Delta t_B} \Rightarrow \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = 2,13$$

## PROBLEMA II

Alternativa E

Considerando um asteroide de raio  $R = 10 \text{ km}$ , da função apresentada, temos:

$$N(R) = 2 \cdot 10^6 \cdot R^{-2,5} = 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-2,5} \Rightarrow N = 6325 \text{ asteroides}$$

## PROBLEMA III

1) Alternativa C

Considerando que toda energia da luminosidade do Sol provém da transformação de massa em energia, temos:

$$L = \frac{E}{\Delta t} \Rightarrow L = \frac{m \cdot c^2}{\Delta t} \Rightarrow 3,8 \cdot 10^{26} = \frac{m \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{1 \text{ s}} \Rightarrow m = 4,2 \cdot 10^9 \text{ kg/s}$$

2) Alternativa D

Sendo  $F$  a energia por segundo por metro quadrado (fluxo) que chega na Terra vinda do Sol, temos:

$$F = \frac{L}{4\pi \cdot d^2} = \frac{3,8 \cdot 10^{26}}{4\pi \cdot (1,5 \cdot 10^{11})^2} \Rightarrow F = 1344 \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$$

## PROBLEMA IV

1) Alternativa D

Considerando que  $1 \text{ pc} = 206\,265 \text{ ua}$ , temos:

$$\text{tg} \alpha = \frac{10}{25 \cdot 206265} \Rightarrow \alpha = 1,94 \cdot 10^{-6} \text{ rad} = 0,4''$$

*Observação:* Para ângulos pequenos  $\text{tg} \alpha \approx \alpha$ . Pela definição de parsec (pc), se dividirmos uma distância em ua por outra em pc, encontraremos o ângulo em segundo de arco. Logo:

$$\alpha = \frac{10 \text{ ua}}{25 \text{ pc}} \Rightarrow \alpha = 0,4''$$

2) Alternativa A

Para ângulos pequenos  $\text{sen} \theta \approx \theta$ , portanto:

$$\operatorname{sen}\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} \Rightarrow \theta = 1,22 \frac{1,6 \cdot 10^{-6}}{8,1} \Rightarrow \theta = 2,41 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = \boxed{0,05''}$$

Sim, o anel é observável, pois  $\alpha > \theta$ .

### PROBLEMA V

#### 1) Alternativa E

A latitude do lugar será a altura do polo Sul celeste, que pode ser encontrada pela média dos complementos das distâncias zenitais máxima e mínima, logo:

$$|\phi| = \frac{(90^\circ - 81^\circ) + (90^\circ - 22^\circ 40')}{2} = \frac{76^\circ 20'}{2} \Rightarrow |\phi| = 38^\circ 10'$$

Como o observador encontra-se no hemisfério Sul, temos que a latitude é  $\phi = -38^\circ 10'$ .

#### 2) Alternativa B

O módulo da declinação é dado por:

$$|\delta| = |\phi| + z_{\min} = 38^\circ 10' + 22^\circ 40' \Rightarrow |\delta| = 60^\circ 50'$$

Como a estrela pertence ao hemisfério celeste Sul, temos  $\delta = -60^\circ 50'$ .

#### 3) Alternativa C

Ao atingir a altura máxima,  $\alpha$  Centauri estará cruzando o meridiano superior local, logo seu ângulo horário será igual a zero, portanto:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow TSL = \alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = 14h40 \text{ min}}$$

### PROBLEMA VI

#### 1) Alternativa E

Sendo  $a$  a distância que o satélite, de massa desprezível, encontra-se do centro da Terra, da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$\frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow \frac{(24.3600)^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow a = 42241 \text{ km} \Rightarrow \boxed{a \approx 42300 \text{ km}}$$

#### 2) Alternativa A

Considerando que o satélite está com velocidade inicial  $v$ , em uma órbita circular, temos que o incremento  $\Delta v$  que deverá ser fornecido ao satélite para que adquira velocidade igual a velocidade de escape ( $v_{\text{esc}}$ ) é:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{l} v + \Delta v = v_{\text{esc}} \\ v_{\text{esc}} = \sqrt{2} \cdot v \end{array} \right. &\Rightarrow v + \Delta v = v\sqrt{2} \Rightarrow \Delta v = v(\sqrt{2} - 1) = \sqrt{\frac{GM_T}{a}}(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \Delta v = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}}{4,2241 \cdot 10^7}}(\sqrt{2} - 1) \Rightarrow \boxed{\Delta v = 1,27 \text{ km/s}} \end{aligned}$$

**PROBLEMA VII**

Alternativa B

Considerando que a luminosidade de Marte ( $L_M$ ) é mesma nas duas situações, da definição de fluxo, temos:

$$\left| \begin{array}{l} F_{M_2} = \frac{L_M}{4\pi \cdot (r_M - r_T)^2} \\ F_{M_1} = \frac{L_M}{4\pi \cdot (r_M + r_T)^2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{F_{M_2}}{F_{M_1}} = \frac{(r_M + r_T)^2}{(r_M - r_T)^2} \Rightarrow \frac{F_{M_2}}{F_{M_1}} = \left( \frac{2,52}{0,52} \right)^2 \Rightarrow \frac{F_{M_2}}{F_{M_1}} = 23,485 \Rightarrow \frac{F_{M_2}}{F_{M_1}} \approx 23,5$$

**PROBLEMA VIII**

1) Alternativa A

Da equação de Pogson, vem:

$$m - M = 5 \cdot \log d - 5 \Rightarrow -1,5 - M = 5 \log 2,6 - 5 \Rightarrow M = 1,42 \Rightarrow M \approx 1,4$$

2) Alternativa B

Comparando as magnitudes absolutas do Sol e de Sirius, temos:

$$M_{Sol} - M_{Sirius} = -2,5 \cdot \log \left( \frac{F_{Sol}}{F_{Sirius}} \right) \Rightarrow 4,82 - 1,42 = -2,5 \cdot \log \left( \frac{L_{Sol}}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_{Sirius}} \right) \Rightarrow -1,36 = \log \left( \frac{L_{Sol}}{L_{Sirius}} \right) \Rightarrow \frac{L_{Sirius}}{L_{Sol}} = 22,9 \approx 23$$

3) Alternativa B

Comparando as luminosidades, vem:

$$\frac{L_{Sirius}}{L_{Sol}} = \frac{4\pi R_{Sirius}^2 \sigma T_{Sirius}^4}{4\pi R_{Sol}^2 \sigma T_{Sol}^4} \Rightarrow 22,9 = \left( \frac{R_{Sirius}}{R_{Sol}} \right)^2 \cdot \left( \frac{10000}{5800} \right)^4 \Rightarrow \frac{R_{Sirius}}{R_{Sol}} = 1,6$$

**PROBLEMA IX**

Alternativa D

A partir das relações apresentadas no enunciado, temos que a densidade de matéria  $\rho_m$  é:

$$\left| \begin{array}{l} \Omega_m = \frac{\rho_m}{\rho_c} \\ \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \end{array} \right. \Rightarrow \rho_m = \frac{3H^2}{8\pi G} \cdot \Omega_m = \frac{3 \cdot (2,1 \cdot 10^{-18})^2 \cdot 0,3}{8\pi \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow \rho_m = 2,369 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$$

Como a matéria bariônica corresponde a 16% da densidade de matéria  $\rho_m$ , temos que 84% estão associados a matéria, logo sua densidade é:

$$\rho_{escura} = 84\% \rho_m = 0,84 \cdot 2,369 \cdot 10^{-27} \Rightarrow \rho_{escura} = 1,989 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3 \approx 2,0 \cdot 10^{-27} \text{ kg/m}^3$$

## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

### PROBLEMA I

1) Da equação do Efeito Doppler, temos que a velocidade de rotação observada ( $v$ ) da nuvem é:

$$\frac{v}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{v}{3.10^5} = \frac{1,54.10^{-4}}{21.10^{-2}} \Rightarrow v = 220 \text{ km/s}$$

2) Considerando a nuvem em órbita circular, e que toda a massa visível está concentrada no núcleo galáctico, temos que a velocidade teórica de rotação ( $v_T$ ) é:

$$v_T = \sqrt{\frac{GM_{galáxia}}{R}} = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} \cdot 10^{11} \cdot 2.10^{30}}{3.10^4 \cdot 3,086.10^{16}}} \Rightarrow v_T = 1,20.10^5 \text{ m/s} \Rightarrow v_T = 120 \text{ km/s}$$

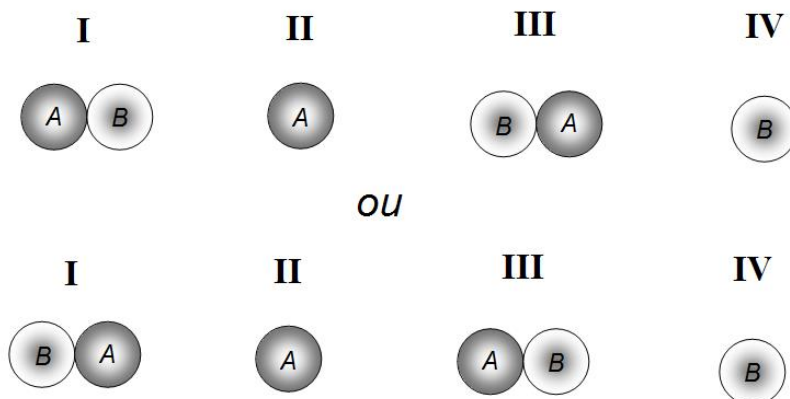
3) Comparando os resultados dos itens (1) e (2), temos que a velocidade teórica de rotação é menor que a velocidade observada ( $v_T < v$ ). Essa diferença pode ser justificada pois consideramos apenas a massa visível da galáxia ao calcularmos a velocidade de rotação teórica. Para obtermos o resultado previsto em (1), devemos ter uma massa  $M$  de:

$$v_T = v = \sqrt{\frac{GM}{R}} \Rightarrow 220.10^3 = \sqrt{\frac{6,67.10^{-11} M}{3.10^4 \cdot 3,086.10^{16}}} \Rightarrow M = 6,748.10^{41} \text{ kg} \Rightarrow M = 3,36.10^{11} M_{Sol} \Rightarrow \\ \Rightarrow M = 3,36.M_{galáxia}$$

Portanto, 3,36 vezes maior que a massa visível. Este excesso pode ser explicado pela presença de um halo de matéria escura.

### PROBLEMA II

1) A seguir seguem dois esquemas possíveis. Sendo A a estrela menos brilhante e B a estrela mais brilhante, para cada ponto, temos:



2) Como a profundidade de cada mínimo é definida pela diferença entre a magnitude aparente da estrela e a magnitude aparente total da binária, para o mínimo primário, temos:

$$\Delta mag_1 = m_A - m_{tot} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_A}{F_{tot}}\right) \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{4\pi \cdot d^2} \cdot \frac{4\pi \cdot d^2}{L_{tot}}\right) \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{L_{tot}}\right)$$

Analogamente, para o mínimo secundário, vem:

$$\Delta mag_2 = m_B - m_{tot} = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_B}{F_{tot}}\right) \Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_B}{4\pi \cdot d^2 \cdot L_{tot}}\right) \Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_B}{L_{tot}}\right)$$

3) Para o mínimo primário, temos:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{L_{tot}}\right) \\ L_{tot} = L_A + L_B \\ L = 4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{array} \right. \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_A}{L_A + L_B}\right) \Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(1 + \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4}{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_B^4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_1 = -\frac{5}{2} \log\left(1 + \left(\frac{5000}{12000}\right)^4\right) \Rightarrow \Delta mag_1 = 3,8$$

Analogamente, para o mínimo secundário, vem:

$$\Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_B}{L_A + L_B}\right) = -\frac{5}{2} \log\left(1 + \frac{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_B^4}{4\pi \cdot R^2 \cdot \sigma \cdot T_A^4}\right) \Rightarrow \Delta mag_2 = -\frac{5}{2} \log\left(1 + \left(\frac{12000}{5000}\right)^4\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta mag_2 = 0,03$$

### PROBLEMA III

1) Distribuindo toda a massa da Lua pela superfície terrestre, temos que o novo raio  $R$  será:

$$V = V_{Terra} + V_{Lua} \Rightarrow \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_{Terra}^3 + \frac{4}{3} \pi R_{Lua}^3 \Rightarrow R^3 = R_{Terra}^3 + R_{Lua}^3 = (6370)^3 + (1740)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 6413 \text{ km}$$

Logo, o aumento do raio  $\Delta R$ , seria de:

$$\Delta R = R - R_{Terra} = 6413 - 6370 \Rightarrow \Delta R = 43 \text{ km}$$

2) Comparando as acelerações da gravidade na nova situação ( $g'$ ) com a atual ( $g$ ), vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} g' = \frac{G \cdot (M_{Terra} + M_{Lua})}{R^2} \\ g = \frac{G \cdot M_{Terra}}{R_{Terra}^2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{g'}{g} = \frac{M_{Terra} + M_{Lua}}{M_{Terra}} \cdot \left(\frac{R_{Terra}}{R}\right)^2 = \frac{1,012 \cdot M_{Terra}}{M_{Terra}} \cdot \left(\frac{6370}{6413}\right)^2 \Rightarrow \frac{g'}{g} = 0,9985$$

Portanto, praticamente não haverá alteração no valor da aceleração da gravidade terrestre.

**PROBLEMA IV**

1) Considerando que o asteroide também orbita o Sol, da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$P^2 = a^3 \Rightarrow \left(\frac{11,87}{3}\right)^2 = a^3 \Rightarrow a = 2,5 \text{ ua}$$

2) Considerando que a órbita do asteroide tem excentricidade  $e$ , e o Sol está a uma distância  $c$  do centro da elipse, temos que a menor distância  $q$  entre o asteroide e o Sol é dado por:

$$\begin{cases} q = a - c \\ e = \frac{c}{a} \end{cases} \Rightarrow q = a \cdot (1 - e) = 2,5 \cdot (1 - 0,3) \Rightarrow q = 1,75 \text{ ua}$$

Logo, a menor distância  $d$  entre o asteroide e a Terra é:

$$d = q - 1 \text{ ua} = 1,75 - 1 \Rightarrow d = 0,75 \text{ ua}$$

**PROBLEMA V**

1) Considerando que a galáxia possui *redshift*  $z = 0,05$ , da Lei de Hubble, temos:

$$\begin{cases} v = H_0 \cdot r \\ z = \frac{v}{c} \end{cases} \Rightarrow H_0 \cdot r = z \cdot c \Rightarrow 65 \cdot r = 0,05 \cdot 3 \cdot 10^5 \Rightarrow r = 230,77 \text{ Mpc}$$

2) Considerando que a velocidade permaneceu constante, da definição da velocidade média, temos:

$$\begin{cases} v = \frac{r}{\Delta t} \\ v = H_0 \cdot r \end{cases} \Rightarrow H_0 \cdot r = \frac{r}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{H_0} = \frac{1}{65 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}} \Rightarrow \Delta t = \frac{10^6 \cdot 3,086 \cdot 10^{13} \text{ km}}{65 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}} \Rightarrow \Delta t = 4,747 \cdot 10^{17} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 1,50 \cdot 10^{10} \text{ anos}$$

**PROBLEMA VI**

1) Considerando que a órbita é circular, temos:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,1 \cdot 2 \cdot 10^{30}}{5,1 \cdot 5 \cdot 10^{11}}} \Rightarrow v = 14 \text{ km/s}$$

2) A resolução angular ( $\theta$ ) do Gemini Sul é:

$$\theta = 1,22 \frac{\lambda}{D} = 1,22 \cdot \frac{1,6 \cdot 10^{-6}}{8,1} \Rightarrow \theta = 2,4 \cdot 10^{-7} \text{ rad} = 0,05''$$

Para ser detectado o movimento do exoplaneta, seu deslocamento deverá ser igual a resolução angular do telescópio. Considerando que o exoplaneta está a  $r = 25 \text{ pc}$ , essa resolução equivale a distância  $d$  de:

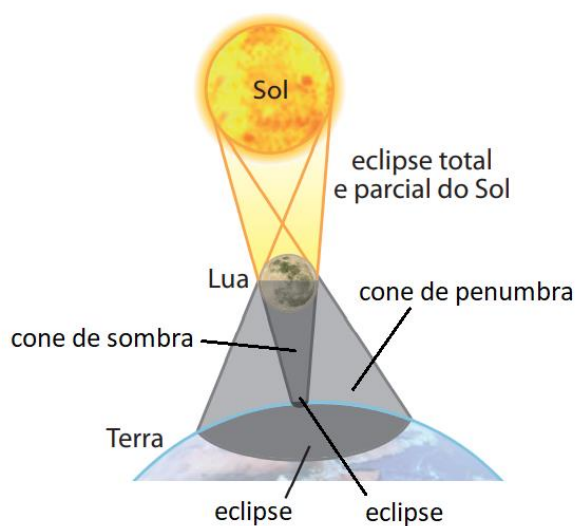
$$\text{tg} \theta = \frac{d}{r} \Rightarrow \text{tg} 0,05'' = \frac{d}{25} \Rightarrow d = 6,06 \cdot 10^{-6} \text{ pc} = 1,87 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Considerando que a velocidade do exoplaneta é constante, temos:

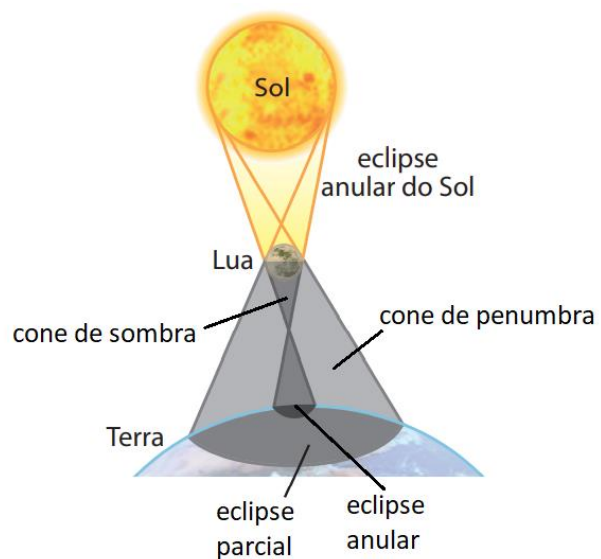
$$v = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow 13,99 \cdot 10^3 = \frac{1,87 \cdot 10^{11}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 1,34 \cdot 10^7 \text{ s} \Rightarrow \Delta t \approx 5 \text{ meses}$$

**PROBLEMA VII**

1) Esquema para o eclipse total do Sol:



2) Esquema para o eclipse anular do Sol:



## VII Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

27 de setembro a 04 de outubro de 2015 – Rio de Janeiro



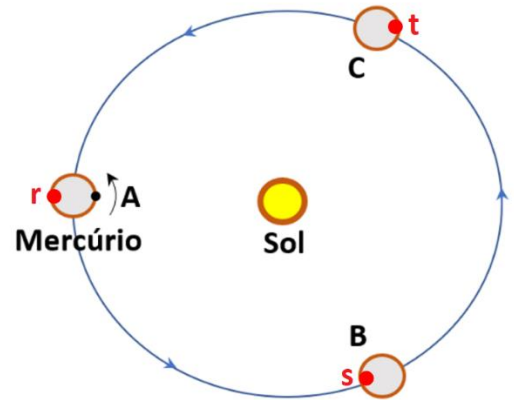
### Prova Teórica Individual – Resoluções

1) Considerando que para cada 3 rotações, Mercúrio faz 2 translações, temos:

a) Tomando como referência o ponto preto indicado com a letra A na figura, após uma translação, Mercúrio terá rotacionado uma vez e meia. Logo, o ponto  $r$  deverá ser marcado do lado oposto à referência indicada em A.

b) Após um terço de translação, Mercúrio terá rotacionado meia vez, logo o ponto  $s$  deverá ser indicado do lado oposto à referência inicial.

c) Após dois terços de translação, Mercúrio terá rotacionado uma vez, logo o ponto  $t$  deverá ser marcado na mesma posição do referencial inicial.



2) a) Sendo  $L_S$  a luminosidade do Sol, cuja massa é  $M_S$ , temos que o tempo de vida  $\Delta t_S$ , na sequência principal é:

$$\left| \begin{array}{l} L_S = \frac{E_S}{\Delta t_S} \\ E_S = 0,7\% \cdot 10\% \cdot (M_S \cdot c^2) \end{array} \right. \Rightarrow \Delta t_S = \frac{0,7\% \cdot 10\% \cdot 1,99 \cdot 10^{30} \cdot (3 \cdot 10^8)^2}{3,9 \cdot 10^{26}} \Rightarrow \Delta t_S = 3,21 \cdot 10^{17} \text{ s} \Rightarrow \Delta t_S = 1,02 \cdot 10^{10} \text{ anos}$$

b) Comparando o tempo de vida na sequência principal de Spica  $\Delta t_{SP}$  e do Sol  $\Delta t_S$ , temos:

$$\frac{\Delta t_{SP}}{\Delta t_S} = \frac{E_{SP}}{L_{SP}} \cdot \frac{L_S}{E_S} \Rightarrow \frac{\Delta t_{SP}}{\Delta t_S} = \frac{L_S}{L_{SP}} \cdot \frac{k \cdot M_{SP} \cdot c^2}{k \cdot M_S \cdot c^2} \Rightarrow \Delta t_{SP} = \frac{11}{13000} \cdot 1,02 \cdot 10^{10} \Rightarrow \Delta t_{SP} = 8,63 \cdot 10^6 \text{ anos}$$

c) Comparando as luminosidades de Spica  $L_{SP}$  com a luminosidade do Sol  $L_S$ , da equação de Stefan-Boltzmann, temos:

$$\frac{L_{SP}}{L_S} = \frac{4\pi R_{SP}^2 \cdot \sigma \cdot T_{SP}^4}{4\pi R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4} \Rightarrow \frac{L_{SP}}{L_S} = \left( \frac{R_{SP}}{R_S} \right)^2 \cdot \left( \frac{T_{SP}}{T_S} \right)^4 \Rightarrow 1300 = (7,6)^2 \cdot \left( \frac{T_{SP}}{5800} \right)^4 \Rightarrow T_{SP} = 21600 \text{ K}$$

3) Considerando a passagem meridiana ( $H = 0$ ) de Alcione no local  $P$ , temos que o tempo sideral local  $TSL$  é:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow TSL = \alpha \Rightarrow TSL = 03h47 \text{ min } 27s$$

Sabendo que o ponto  $P$  está a  $45^\circ$  a Oeste de *Greenwich*, temos que a hora sideral local em *Greenwich* é:

$$TSG = TSL + \lambda \Rightarrow TSG = 3h47 \text{ min } 27s + 3h \Rightarrow TSG = 6h47 \text{ min } 27s$$

4) Da equação do efeito Doppler não relativístico ( $z < 0,1$ ), temos:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{\Delta\lambda}{393,4} = \frac{1000}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow \Delta\lambda = 1,31 \text{ nm}$$

5) Da equação geral das magnitudes, temos que a relação entre os fluxos na situação de magnitude mínima  $F_1$  e máxima  $F_2$  é:

$$m_1 - m_2 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow 8,6 - 11,7 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = 17,38$$

Considerando que a sua magnitude bolométrica absoluta permanece constante, da equação de Stefan-Boltzmann, vem:

$$L_1 = L_2 \Rightarrow 4\pi R_1^2 \cdot \sigma \cdot T_1^4 = 4\pi R_2^2 \cdot \sigma \cdot T_2^4 \Rightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^4 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2$$

Considerando a estrela como um corpo negro ( $\varepsilon = 1$ ), a partir da Lei de Boltzmann, temos:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\varepsilon \cdot \sigma \cdot T_1^4}{\varepsilon \cdot \sigma \cdot T_2^4} \Rightarrow \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4 = 17,38 \Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = 2,04 \quad \text{e} \quad \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = (2,04)^2 \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} = 4,17$$

6) Do efeito Doppler relativístico, temos que a velocidade radial do objeto é:

$$z = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} - 1 \Rightarrow (z+1)^2 = \frac{c+v}{c-v} \Rightarrow \frac{v}{c} = \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \Rightarrow v = \frac{(0,13+1)^2 - 1}{(0,13+1)^2 + 1} \cdot c \Rightarrow v = 0,12 \cdot c$$

Aplicando o resultado na Lei de Hubble, temos:

$$v = H_0 \cdot d \Rightarrow 0,12 \cdot 3 \cdot 10^5 = 67,8 \cdot d \Rightarrow d = 531 \text{ Mpc}$$

Como 1 pc = 3,26 al, vem:

$$d = 531 \cdot 10^6 \cdot 3,26 = 1,73 \cdot 10^9 \text{ al} = 1,73 \cdot 10^9 \text{ anos}$$

7) Analisando a figura, temos:

- |              |              |              |              |
|--------------|--------------|--------------|--------------|
| 1. (OC), (I) | 2. (OC), (E) | 3. (EC), (I) | 4. (EC), (E) |
| 5. (TR), (I) | 6. (TR), (E) | 7. (SO), (I) | 8. (SO), (E) |

8) a) Lembrando que o sinal emitido é uma onda eletromagnética, e que na ocasião a distância Terra-Plutão era de  $d_{TP} = 31,9 \text{ ua} = 4,77 \cdot 10^{12} \text{ m}$ , temos:

$$\Delta t = \frac{d_{TP}}{c} = \frac{4,77 \cdot 10^{12}}{3 \cdot 10^8} \Rightarrow \Delta t = 15907 \text{ s} = 4 \text{ h } 25 \text{ min}$$

b) Se 1 kbit =  $2^{10}$  bit e 1 Mbit =  $2^{20}$  bit, então cada imagem tem 2,5 Mbit =  $2,5 \cdot 2^{20}$  bit =  $2,5 \cdot 2^{10}$  kbit. Sabendo que a velocidade de transmissão é de 2 kbits/s, o tempo para a imagem ser transmitida será de  $1,25 \cdot 2^{10} \text{ s} = 1,28 \cdot 10^3 \text{ s}$ . Em um mês há  $30 \cdot 24 \cdot 3600 = 2,59 \cdot 10^6 \text{ s}$ . Portanto, em um mês foram enviadas **2 025 imagens**.

c) Sendo  $F_P$  o fluxo solar em Plutão, distante do Sol  $d_{SP} = 33 \text{ ua}$ , e  $F_T$  o fluxo solar na Terra, distante do Sol  $d_{TS} = 1 \text{ ua}$ , da definição de fluxo, temos:

$$\frac{F_P}{F_T} = \frac{L_S}{4\pi d_{SP}^2} \cdot \frac{4\pi d_{TS}^2}{L_S} \Rightarrow \frac{F_P}{F_T} = \left(\frac{1}{33}\right)^2 \Rightarrow F_P = 9,2 \cdot 10^{-4} F_T$$

Portanto, o fluxo solar em Plutão era, aproximadamente, **1 000 vezes** menor que na Terra.

Sendo  $m_P$  a magnitude aparente do Sol visto de Plutão e  $m_T$  a magnitude aparente do Sol visto da Terra, da equação geral das magnitudes, temos:

$$m_P - m_T = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_P}{F_T}\right) \Rightarrow m_P - (-26,7) = -\frac{5}{2} \log(9,2 \cdot 10^{-4}) \Rightarrow m_P = -19,1$$

d) Adotando o centro de Plutão como referência, a posição  $r$  do centro de massa do sistema é:

$$d_{CM} = \frac{d_{PC} \cdot M_C}{M_P + M_C} = \frac{195702,54 \cdot 10^{-4}}{2,2 \cdot 10^{-3} + 2,54 \cdot 10^{-4}} \Rightarrow d_{CM} = 2026 \text{ km}$$

Portanto, a partir da superfície de Plutão, temos que a distância  $r$  do centro de massa será:

$$d_{CM} = R_P + r \Rightarrow 2026 = 1186 + r \Rightarrow r = 840 \text{ km}$$

Da 3ª Lei de Kepler, temos que o período  $P_C$  de Caronte é:

$$\frac{P_C^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_P + M_C)} \Rightarrow \frac{P_C^2}{(1,957 \cdot 10^7)^3} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (2,2 \cdot 10^{-3} + 2,54 \cdot 10^{-4}) \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_C = 5,5 \cdot 10^5 \text{ s} = 6,37 \text{ dias}$$

9) Da 3ª Lei de Kepler, desprezando a massa do satélite, temos que o período orbital  $P$  é:

$$\frac{P^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \Rightarrow \frac{P^2}{(6,371 \cdot 10^6 + 8 \cdot 10^5)^3} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,97 \cdot 10^{24}} \Rightarrow P = 6043 \text{ s} = 1,68 \text{ h}$$

Portanto, o satélite dá cerca de **14,4 voltas** na terra a cada 24 h.

10) Considerando que o satélite deve girar em torno do seu eixo com o mesmo período com que gira em torno da Terra, temos, de acordo com a questão 9, para o período de 1,68 hora ( $\approx 100$  minutos), uma velocidade angular de 0,01 rotações por minuto, ou seja, **0,01 rpm**.

## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

- 1) a) Serão todas as estrelas que possuem declinação menor do que zero ( $\delta < 0$ ), ou seja: **Peacock, Rigel e Achernar**.
- b) Para não ser visível em Santiago, a estrela deve possuir declinação maior que  $57^\circ$  ( $\delta > 57^\circ$ ). São elas: **Alderamin e Polaris**.
- c) Para ser circumpolar em Montevidéu, a estrela deve possuir declinação menor que  $-55^\circ$  ( $\delta < -55^\circ$ ). São elas: **Peacock e Achernar**.

d) Para fazer passagem meridiana próxima ao zênite na Cidade do México, a declinação da estrela deve ser próxima de  $19^\circ$  ( $\delta \approx 19^\circ$ ), o que se verifica para **Algeiba e Arcturus**.

e) O Rio de Janeiro está a  $2^\circ$  a Oeste do meridiano central  $45^\circ$  W, portanto a hora sideral do cruzamento da estrela deve ser  $t = 2h30min - \frac{60min}{15^\circ} \cdot 2^\circ = 2h22min$ . No dia 21 de março ( $\delta_{Sol} = 0^\circ$  e  $AR_{Sol} = 0^\circ$ ) o ângulo horário do ponto vernal (tempo sideral local  $TSL$ ) neste instante é  $TSL = 12h + 2h22min = 14h22min$ . Para a estrela fazer passagem meridiana ( $H = 0$ ) neste instante, sua ascensão reta  $AR$  deve ser:

$$TSL = H + AR \Rightarrow AR = 14h22min$$

O que mais se aproxima à coordenada de **Arcturus**.

2) a) O diâmetro aparente do Sol ( $D_{Sol}$ ) nesta data é:

$$D_{Sol} \approx anctg\left(\frac{1,392}{149,9}\right) \Rightarrow D_{Sol} \approx 0,532^\circ$$

Já o diâmetro aparente da Lua ( $D_{Lua}$ ) próxima ao perigeu será:

$$D_{Lua} \approx anctg\left(\frac{3475}{363104}\right) \Rightarrow D_{Lua} \approx 0,548^\circ$$

Como  $D_{Lua} > D_{Sol}$ , este eclipse foi **total**.

b) O diâmetro aparente do Sol ( $D_{Sol}$ ) nestas condições será:

$$D_{Sol} \approx anctg\left(\frac{1,392}{152,1}\right) \Rightarrow D_{Sol} \approx 0,524^\circ$$

Já o diâmetro aparente da Lua ( $D_{Lua}$ ) próxima ao apogeu:

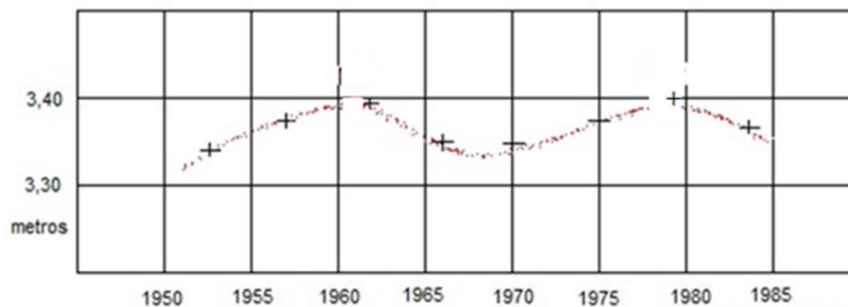
$$D_{Lua} \approx anctg\left(\frac{3475}{405696}\right) \Rightarrow D_{Lua} \approx 0,491^\circ$$

Como  $D_{Lua} < D_{Sol}$ , este eclipse será **anular**.

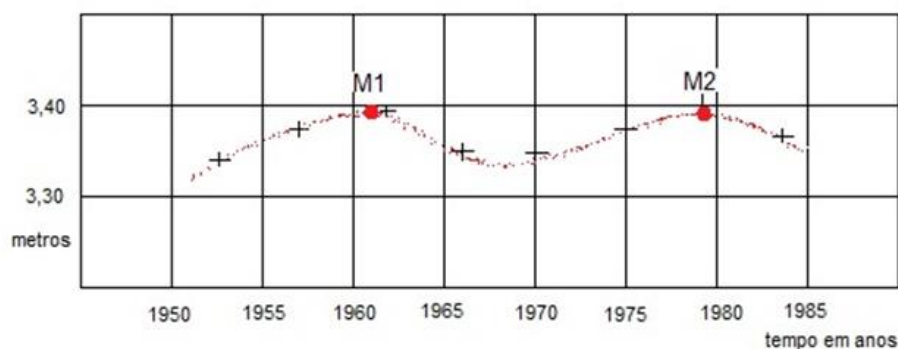
3) a) As marés altas se alinham com os centros da Lua e da Terra (em primeira aproximação). Como a Lua caminha para Leste no céu em virtude de sua translação em torno da Terra, algo da ordem de 52 min é o atraso (médio) diário da maré. O primeiro valor da resposta (12h26min) se refere à posição da Lua relacionada ao anti-meridiano do observador.

$$t_0 + 12h26min \quad \text{e} \quad t_0 + 24h52min$$

b) A partir dos dados da tabela, vem:



c) As abscissas de M1 e M2, indicando as marés máximas, são aproximadamente 1961 e 1979, cuja diferença é cerca de **18 anos**, valor aproximado do período de precessão citada.



4) a) Do enunciado, temos que a temperatura subsolar ( $T_{SS}$ ), pode ser determinada por:

$$\varepsilon \cdot \sigma \cdot T_{SS}^4 = \frac{S_S}{R^2} (1 - A) \Rightarrow T_{SS}^4 = \frac{S_S}{\varepsilon \cdot \sigma} \cdot \frac{(1 - A)}{R^2} \Rightarrow T_{SS} = \frac{2,411 \cdot 10^{10}}{0,9} \cdot \frac{(1 - A)}{R^2}$$

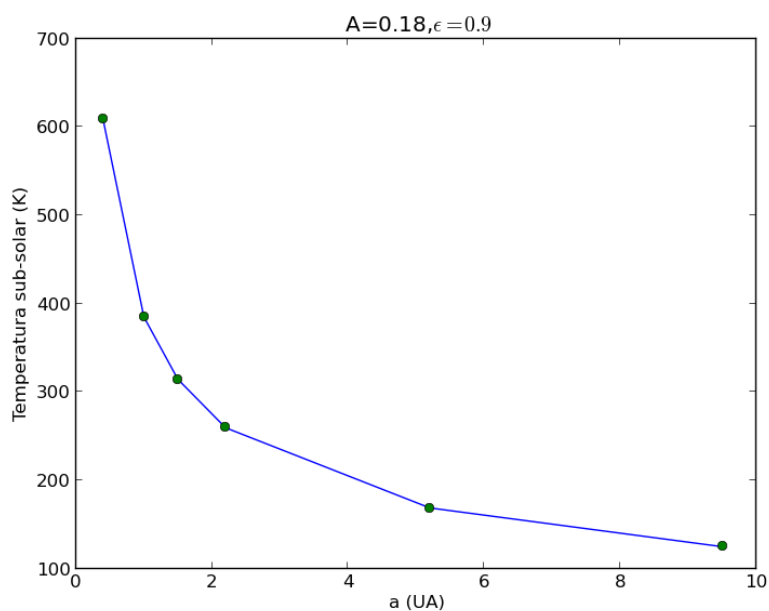
Considerando que todos os objetos da tabela tenham o mesmo albedo do asteroide Vesta ( $A = 0,18$ ), a temperatura subsolar ( $T'_{SS}$ ) é determinada por:

$$T'_{SS}{}^4 = \frac{S_S}{\varepsilon \cdot \sigma} \cdot \frac{(1 - A)}{R^2} \Rightarrow T'_{SS} = \frac{2,411 \cdot 10^{10}}{0,9} \cdot \frac{(1 - 0,18)}{R^2} \Rightarrow T'_{SS} = \frac{385}{\sqrt{R}}$$

Aplicando os dados da tabela, temos que os respectivos valores de  $T_{SS}$  e  $T'_{SS}$  valem:

Corpo	$R(\text{ua})$	$A$	$T_{SS} \text{ (K)}$	$T'_{SS} \text{ (K)}$
Mercurio	0,4	0,07	<b>628,2</b>	<b>608,8</b>
Lua	1,0	0,11	<b>393,0</b>	<b>385,0</b>
Phobos	1,5	0,02	<b>328,7</b>	<b>314,4</b>
Vesta	2,2	0,18	<b>259,6</b>	<b>259,6</b>
Europa	5,2	0,96	<b>79,3</b>	<b>168,8</b>
Enceladus	9,5	0,99	<b>41,5</b>	<b>124,9</b>

Graficamente:



b) Como o processo de transmissão de calor por condução está associada a choques entre partículas, se esse fator fosse importante, a temperatura do ponto subsolar seria menor que o previsto devido à perda de energia nas colisões.

c) Para encontrarmos gelo de água em um corpo sem atmosfera, a temperatura do ponto subsolar deverá ser menor ou igual ao ponto de sublimação do gelo. Considerando o albedo do gelo  $A = 0,9$ , temos:

$$T_{SS}^4 = \frac{S_s}{\varepsilon \cdot \sigma} \cdot \frac{(1-A)}{R^2} \Rightarrow (150)^4 = \frac{2,411 \cdot 10^{10}}{0,9} \cdot \frac{(1-0,9)}{R^2} \Rightarrow R = 2,3 \text{ ua}$$

Portanto, é possível encontrar gelo de água, em corpos sem atmosfera, a partir da distância 2,3 ua.

5) a) A massa total,  $m_{total}$  é dada por:

$$m_{total} = m_{propelente} + m_{estrutura} + m_{satélite}$$

A partir do enunciado e da tabela tem-se:

$$m_{total} = 41602 + 8298 + 100 = 50000 \text{ kg}$$

A relação entre a massa de propelente e a massa total é dada por:

$$\frac{m_{propelente}}{m_{total}} = \frac{41602}{50000} = 0,83 = 83\%$$

b) A relação entre a massa do satélite e a massa total é:

$$\frac{m_{satélite}}{m_{total}} = \frac{100}{50000} = 0,002 = 0,2\%$$

c) De acordo com o enunciado  $\Delta v_{real} = 0,8 \cdot \Delta v_{teórico}$ . Analisando a tabela, temos que  $\Delta v_{teórico} = 9\,565 \text{ m/s}$ , portanto:

$$\Delta v_{real} = 0,8 \cdot 9595 = 7652 \text{ m/s}$$

d) Aplicando a equação do foguete, temos:

$$\Delta v = I_{SP} \cdot g \cdot \ln\left(\frac{m_i}{m_f}\right) \Rightarrow \Delta v_3 = 350 \cdot 10 \cdot \ln\left(\frac{3000 + 750 + 100}{750 + 100}\right) \Rightarrow \Delta v_3 = 5287 \text{ m/s}$$

e) Para se obter a velocidade final do satélite é preciso somar as velocidades dos 3 estágios, logo:

$$\Delta v_{total} = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \Delta v_3 = 2402 + 2176 + 5287 = 9865 \text{ m/s}$$

Comparando-se o valor total teórico com o obtido anteriormente (9 565 m/s, apresentado na tabela), conclui-se que a proposta de se substituir o terceiro e quarto estágios sólidos por um único estágio líquido é viável. Além da vantagem de permitir uma melhor precisão para colocação do satélite em órbita, a massa final do novo foguete (46 975 kg) é inferior àquela do VLS-1 atual (50 000 kg). Como desvantagem, deve-se mencionar que a construção de um motor-foguete a propelente líquido é bem mais complexa do que a de um motor a propelente sólido.

**VIII Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
03 a 08 de outubro de 2016 – Córdoba – Argentina

**Prova Teórica Individual – Resoluções**



1) a) Considerando que a velocidade média de caminhada do ser humano é 5 km/h, temos que o tempo necessário, caminhando, para percorrer a distância de Córdoba até Porto Alegre é:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow 5 = \frac{1400}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 280 \text{ h}$$

Se uma pessoa saudável consegue caminhar cerca de 10 h por dia, levará cerca de 28 dias para percorrer o trajeto. Como a prova da VIII OLAA ocorreu no início de outubro, haverá tempo suficiente para percorrer o trajeto antes do final do ano.

b) A distância, em km, até Próxima Centauri é aproximadamente:

$$p = \frac{1}{d} \Rightarrow 0,8 = \frac{1}{d} \Rightarrow d = 1,25 \text{ pc} = 1,25 \cdot 3,1 \cdot 10^{13} \text{ km} \Rightarrow d \approx 4 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

Considerando a distância entre Plutão e o exoplaneta Próxima B praticamente igual a distância Sol-Próxima Centauri, temos que o tempo de viagem da *New Horizons* seria cerca de:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow 14 = \frac{4 \cdot 10^{13}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t \approx 3 \cdot 10^{12} \text{ s} \approx 100000 \text{ anos}$$

Se uma geração humana dura em média de 25 anos, após 4 000 gerações receberíamos as imagens da *New Horizons*.

c) Para uma sonda que alcance 20% da velocidade da luz, o tempo de viagem é de aproximadamente:

$$v_m = \frac{d}{\Delta t} \Rightarrow 20\% \cdot c = \frac{d}{\Delta t'} \Rightarrow 0,2 \cdot 3 \cdot 10^5 = \frac{4 \cdot 10^{13}}{\Delta t'} \Rightarrow \Delta t' \approx 6,7 \cdot 10^8 \text{ s} \approx 22 \text{ anos}$$

Portanto, é possível chegar a ver as imagens tomadas pela sonda do exoplaneta Próxima B.

2) a) Sabendo que a paralaxe do aglomerado é de 0,057", temos:

$$p = \frac{1}{d} \Rightarrow 0,057 = \frac{1}{d} \Rightarrow d = 17,54 \text{ pc} = \boxed{5,438 \cdot 10^{19} \text{ cm}}$$

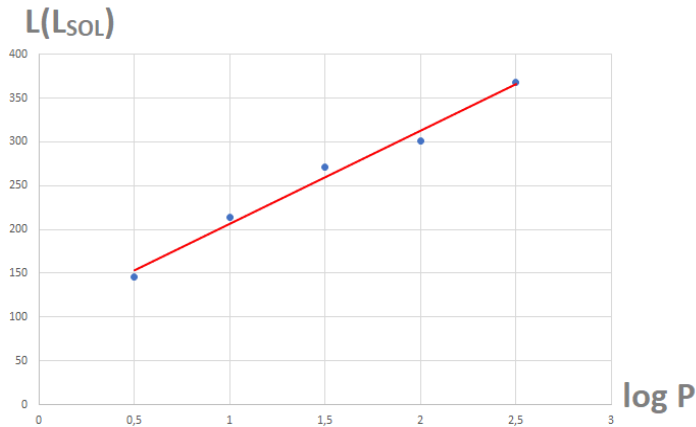
b) A luminosidade de cada uma das estrelas, em luminosidades solares, é:

$$\begin{aligned} L_1 &= F_1 \cdot 4\pi \cdot d^2 = 1,5 \cdot 10^{-5} \cdot 4\pi \cdot (5,438 \cdot 10^{19})^2 \Rightarrow L_1 = 5,571 \cdot 10^{35} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} = 145,46 L_S \\ L_2 &= F_2 \cdot 4\pi \cdot d^2 = 2,2 \cdot 10^{-5} \cdot 4\pi \cdot (5,438 \cdot 10^{19})^2 \Rightarrow L_2 = 8,171 \cdot 10^{35} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} = 213,35 L_S \\ L_3 &= F_3 \cdot 4\pi \cdot d^2 = 2,8 \cdot 10^{-5} \cdot 4\pi \cdot (5,438 \cdot 10^{19})^2 \Rightarrow L_3 = 10,399 \cdot 10^{35} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} = 271,53 L_S \\ L_4 &= F_4 \cdot 4\pi \cdot d^2 = 3,1 \cdot 10^{-5} \cdot 4\pi \cdot (5,438 \cdot 10^{19})^2 \Rightarrow L_4 = 11,514 \cdot 10^{35} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} = 300,63 L_S \\ L_5 &= F_5 \cdot 4\pi \cdot d^2 = 3,8 \cdot 10^{-5} \cdot 4\pi \cdot (5,438 \cdot 10^{19})^2 \Rightarrow L_5 = 14,114 \cdot 10^{35} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} = 368,51 L_S \end{aligned}$$

Completando a tabela, temos:

Estrela	log P (dias)	Fluxo ( $10^{-5} \text{ erg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-2}$ )	Luminosidade ( $L_\odot$ )
Variável 1	0,5	1,5	<b>145,46</b>
Variável 2	1	2,2	<b>213,35</b>
Variável 3	1,5	2,8	<b>271,53</b>
Variável 4	2	3,1	<b>300,63</b>
Variável 5	2,5	3,8	<b>368,51</b>

c) A partir dos dados da tabela, temos:



A equação linear que se ajusta a da função é:

$$L(L_{Sol}) = 106,7 \cdot \log P(\text{dias}) + 99,89$$

d) Da equação encontrada no item (c), temos que a luminosidade da estrela é:

$$L(L_{Sol}) = 106,7 \cdot \log P(\text{dias}) + 99,89 \Rightarrow L(L_{Sol}) = 106,7 \cdot \log(178) + 99,89 \Rightarrow L(L_{Sol}) = 340$$

Portanto:

$$F = \frac{L}{4\pi \cdot d^2} \Rightarrow 1,14 \cdot 10^{-15} = \frac{340 \cdot 3,83 \cdot 10^{33}}{4\pi d^2} \Rightarrow d = 9,537 \cdot 10^{24} \text{ cm} \Rightarrow d = 3,08 \cdot 10^6 \text{ pc}$$

e) Comparando a magnitude absoluta da estrela cefeida  $M$  com o Sol  $M_{Sol}$ , temos:

$$M - M_{Sol} = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{L}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow M - 4,83 = -\frac{5}{2} \cdot \log(340) \Rightarrow M = -1,49$$

Da equação de Pogson, temos que a magnitude aparente  $m$  da estrela é:

$$m - M = 5 \log d - 5 \Rightarrow m + 1,49 = 5 \log(3,076 \cdot 10^6) - 5 \Rightarrow m = 26$$

3) a) Analisando a tabela, temos que a variação da distância em 1 Mpc, produz uma variação de velocidade de 70 km/s, logo, neste caso, a constante de Hubble tem valor de:

$$H_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$$

b) Tendo como referencial um extraterrestre na galáxia  $D$  e respeitando a geometria apresentada na figura, temos:

$$\begin{aligned} d_A^2 &= 3^2 + 1^2 \Rightarrow d_A = 3,16 \text{ Mpc} & v_A^2 &= 210^2 + 70^2 \Rightarrow v_A = 221,36 \text{ km/s} \\ d_B^2 &= 1^2 + 2^2 - 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow d_B = 2,80 \text{ Mpc} & v_B^2 &= (140 \cdot \cos 45^\circ)^2 + (140 \cos 45^\circ + 70)^2 \Rightarrow v_B = 195,85 \text{ km/s} \\ d_C^2 &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \cos 135^\circ \Rightarrow d_C = 1,85 \text{ Mpc} & v_C^2 &= (70 \cdot \cos 45^\circ)^2 + (70 \cos 45^\circ + 70)^2 \Rightarrow v_C = 129,34 \text{ km/s} \\ d_{VL} &= 1 \text{ Mpc} & v_{VL} &= 70 \text{ km/s} & v_E &= 140 - 70 = 70 \text{ km/s} \\ d_F^2 &= 3^2 + 1^2 \Rightarrow d_F = 3,16 \text{ Mpc} & v_F^2 &= 210^2 + 70^2 \Rightarrow v_F = 221,36 \text{ km/s} \end{aligned}$$

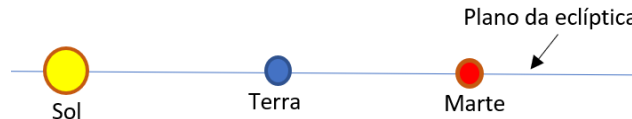
Galáxia	Distância (Mpc)	Velocidade (km/s)
A	<b>3,16</b>	<b>221,36</b>
B	<b>2,80</b>	<b>195,85</b>
C	<b>1,85</b>	<b>129,34</b>
Via Láctea	1	70
E	1	<b>70</b>
F	<b>3,16</b>	<b>221,36</b>

c) Dividindo as velocidades e as distâncias encontradas no item anterior, temos que o valor da constante da “Lei do ET” ( $H_{ET}$ ), vale:

$$H_{ET} = 70 \text{ km.s}^{-1} . \text{Mpc}^{-1}$$

d) Não a diferença entre a Lei de Hubble e a “Lei do ET”. Percebe-se que o valor da constante de Hubble é válida em escala cosmológica e independe do referencial escolhido.

4) a) Considerando Marte em oposição a Terra, em relação ao Sol, temos:



b) A distância mínima e máxima, em metros, entre a Terra e Marte é:

$$d_{\text{mín}} = 1,52 - 1 = 0,52 \text{ ua} = 7,80 \cdot 10^{10} \text{ m} \quad d_{\text{máx}} = 1,52 + 1 = 2,52 \text{ ua} = 3,78 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

c) Sendo  $R_M$  o raio de Marte, o diâmetro angular mínimo e máximo, em segundos de arco, com que se vê Marte da Terra é:

$$\text{tg} \theta_{\text{mín}} = \frac{2R_M}{d_{\text{máx}}} = \frac{2,3,397 \cdot 10^6}{3,78 \cdot 10^{11}} \Rightarrow \theta_{\text{mín}} = 3,71'' \quad \text{tg} \theta_{\text{máx}} = \frac{2R_M}{d_{\text{mín}}} = \frac{2,3,397 \cdot 10^6}{7,80 \cdot 10^{10}} \Rightarrow \theta_{\text{máx}} = 17,97''$$

d) Considerando que o diâmetro de 1 peso argentino é de 2 cm, temos:

$$\text{tg} \theta_{\text{máx}} = \frac{d_P}{d} \Rightarrow \text{tg} 17,97'' = \frac{2}{d} \Rightarrow d = 2,3 \cdot 10^4 \text{ cm} = 230 \text{ m}$$

e) A culminação superior acontece quando Marte atinge a altura máxima para o observador. Portanto, em sua máxima aproximação, a hora local aproximada de culminação será às 0h, pois Marte estará em oposição em relação ao Sol. Já em seu máximo afastamento, a hora local aproximada de culminação será às 12h, pois Marte estará em conjunção com o Sol.

f) Para podermos enxergar a extensão do Valles Marineris, o fator limitante será a sua largura. O diâmetro angular ( $\alpha$ ) mínimo e máximo da largura do Valles Marineris visto da Terra é:

$$\text{tg} \alpha_{\text{mín}} = \frac{600 \text{ km}}{d_{\text{máx}}} = \frac{6 \cdot 10^5}{3,78 \cdot 10^{11}} \Rightarrow \alpha_{\text{mín}} = 0,327'' \quad \text{tg} \alpha_{\text{máx}} = \frac{600 \text{ km}}{d_{\text{mín}}} = \frac{6 \cdot 10^5}{7,80 \cdot 10^{10}} \Rightarrow \alpha_{\text{máx}} = 1,586''$$

Como para resolver um objeto, a resolução angular deve ser cerca de 1/3 do diâmetro angular do objeto, temos que o diâmetro mínimo e máximo do telescópio para distinguir toda a extensão do *cânion*, será:

$$\frac{\alpha_{\text{máx}}}{3} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{mín}}} \Rightarrow \frac{1,5864,898 \cdot 10^{-6}}{3} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{D_{\text{mín}}} \Rightarrow D_{\text{mín}} = 0,259 \text{ m} = 26 \text{ cm}$$

$$\frac{\alpha_{\text{mín}}}{3} = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_{\text{máx}}} \Rightarrow \frac{0,3274,898 \cdot 10^{-6}}{3} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{D_{\text{máx}}} \Rightarrow D_{\text{máx}} = 1,257 \text{ m} = 126 \text{ cm}$$

g) Visto do Sol, o diâmetro angular aparente da Terra ( $\theta_T$ ) e de Marte ( $\theta_M$ ), valem:

$$\operatorname{tg}\theta_T = \frac{2R_T}{d_{T-S}} = \frac{2.6,371.10^6}{1,5.10^{11}} \Rightarrow \theta_T = 8,58.10^{-5} \text{ rad} \quad \operatorname{tg}\theta_M = \frac{2R_M}{d_{M-S}} = \frac{2.3,397.10^6}{1,52.1,5.10^{11}} \Rightarrow \theta_M = 3,01.10^{-5} \text{ rad}$$

Já a velocidade angular de cada um os astros é:

$$\omega_T = \frac{2\pi}{P_T} = \frac{2\pi}{1 \text{ ano}} = 2\pi \frac{\text{rad}}{\text{ano}} \quad \omega_M = \frac{2\pi}{P_M} = \frac{2\pi}{\sqrt{a_M^3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{1,52^3}} \Rightarrow \omega_M = \frac{2\pi \text{ rad}}{1,87 \text{ ano}}$$

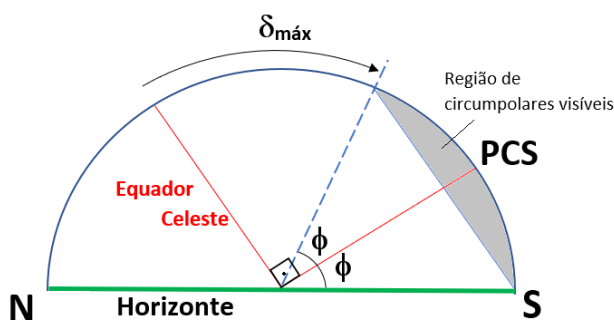
Considerando as órbitas circulares, coplanares e que Marte e a Terra giram no mesmo sentido, temos que o tempo de ocultação será:

$$\omega_R = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \Rightarrow \omega_T - \omega_M = \frac{\theta_T + \theta_M}{\Delta t} \Rightarrow 2\pi - \frac{2\pi}{1,87} = \frac{8,58.10^{-5} + 3,01.10^{-5}}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = 3,967.10^{-5} \text{ ano} \Rightarrow \Delta t = 20,83 \text{ min}$$

5) a) Entre os dias 2 de março e 15 de junho existem 105 dias. Sabendo que após 365,25 dias a estrela estará culminando superiormente no mesmo horário, temos que após 105 dias o ângulo  $H$  entre a estrela e o meridiano local (ângulo horário) será:

$$H = 105 \text{ dias} \cdot \frac{360^\circ}{365,25 \text{ dias}} \Rightarrow H = 103,56^\circ \Rightarrow H = 6 \text{ h } 53 \text{ min } 58 \text{ s}$$

b) Do esquema, temos:



$$|\phi| \geq 90^\circ - |\delta| \Rightarrow |\phi| \geq 90^\circ - 62^\circ 41' \Rightarrow |\phi| \geq 27^\circ 19' S$$

c) No Equador, pois  $\phi = 0^\circ$  o que implica  $\delta = 90^\circ$ .

d) A latitude do círculo polar antártico é cerca de  $66^\circ 30' N$ , o que implica que a declinação do Sol quando se torna circumpolar deverá ser:

$$\delta = 90^\circ - \phi \Rightarrow \delta = 90^\circ - 66^\circ 30' \Rightarrow \delta = +23^\circ 30'$$

O que corresponde ao solstício de dezembro.

## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) De acordo com o desenho, percebe-se que a manobra realizada se trata de uma órbita elíptica, sendo o ponto A o periastro, o ponto B o apoastro, e planeta M situado em um dos focos. Esta elipse tem como semieixo maior  $a = 2R_0$  e distância focal  $c = R_0$ . Desta forma, temos que o centro desta se encontra no ponto D (ver figura a seguir) e, como a trajetória da nave em C e o segmento  $\overline{AB}$  são paralelos, é possível determinar  $\alpha$  usando os segmentos  $\overline{CM}$  e  $\overline{MD}$ .

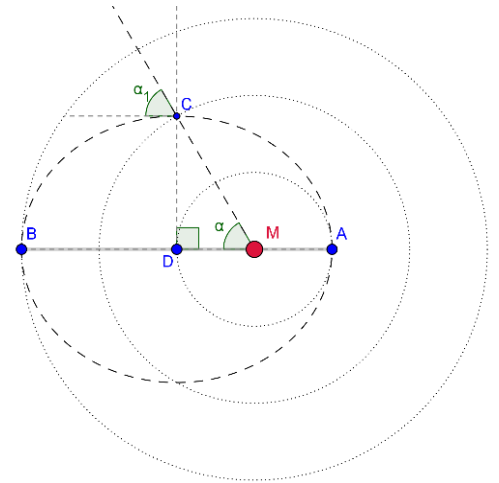
$$\text{Como } \overline{CM} = 2R_0 \text{ e } \overline{MD} = R_0, \text{ temos que } \cos \alpha = \frac{\overline{MD}}{\overline{CM}} = \frac{R_0}{2R_0} = \frac{1}{2} \therefore \alpha = 60^\circ$$

b) Pela 3ª Lei de Kepler, temos uma relação entre o período orbital ( $T$ ) e o semieixo maior da órbita ( $a = 2R_0$ ), sendo  $M$  a massa do planeta.

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 \cdot 8R_0^3}{GM} \Rightarrow T = 4\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{GM}}$$

Como o tempo para ir de A até B é metade do período orbital, temos que:

$$t_{A \rightarrow B} = \frac{T}{2} = 2\pi R_0 \sqrt{\frac{R_0}{GM}}$$



2) a) Isolando  $V$  na equação (3), temos a seguinte condição:

$$V = \frac{5,14 - T}{0,0042}$$

Aplicando a relação da velocidade na equação (2), temos o seguinte polinômio:

$$P = 0,00052 \left[ 0,22 \cdot \left( \frac{5,14 - T}{0,0042} \right) + 340 \right]^2$$

Resolvendo o produto notável entre colchetes, chegamos à seguinte aproximação quadrática para a amplitude  $P$ :

$$P = 193,01 - 33,19 \cdot T + 2743,66 \cdot T^2$$

b) Aplicando esta relação na expressão (1) e usando a equação (4), temos a seguinte resolução:

$$P = -2,846 + \left[ \left( \frac{6,54}{\sqrt{2}} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644) \right] - \left[ \left( \frac{0,118}{2} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644)^2 \right] - \left[ \left( \frac{0,002}{2\sqrt{2}} \right) \cdot (0,047 \cdot V + 0,644)^3 \right]$$

A resolução de todos os termos chega ao seguinte polinômio:

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot V^2 - 7,341 \cdot 10^{-8} \cdot V^3$$

c) O melhor caso é quando a ejeção de massa coronal é lenta ( $V = 300$  km/s), pois é possível detectá-la com boa antecedência, tomando assim medidas preventivas. Já no pior caso, a velocidade da ejeção é a maior possível ( $V = 800$  km/s). Usando a relação (3), temos o seguinte intervalo de tempo para a tempestade chegar na Terra:

$$\begin{cases} T_{300} = -0,0042 \cdot 300 + 5,14 \\ T_{800} = -0,0042 \cdot 800 + 5,14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} T_{300} = 3,88 \text{ dias (melhor caso)} \\ T_{800} = 1,78 \text{ dias (pior caso)} \end{cases}$$

d) Se o a perturbação teve um valor de 850 nT, ao aplicarmos este dado na relação calculada no item a, obtém-se o tempo de trânsito ( $T$ ):

$$850 = 193,01 - 33,19 \cdot T + 2743,66 \cdot T^2 \Rightarrow 2743,66 \cdot T^2 - 33,19 \cdot T - 656,99 = 0$$

Trata-se de uma equação de segundo grau. Para obtermos o tempo de trânsito, calcula-se as raízes positivas desta equação. Desta forma, temos que  $T = 0,4954$  dias, o que implica que a tempestade de 1859 aconteceu cerca de 12 horas antes de sua chegada na Terra.

e) Para este caso, podemos utilizar a relação obtida no item b, que vincula a amplitude da perturbação da CME com a velocidade da CME ( $V$ ):

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V - 1,333 \cdot 10^{-4} \cdot V^2 - 7,341 \cdot 10^{-8} \cdot V^3$$

Entretanto, os índices vinculados aos termos quadrático e cúbico são muito baixos. Desta forma, podemos desprezar os dois últimos termos do polinômio, o que estabelece uma relação linear entre P e V:

$$P = 0,1073 + 0,2134 \cdot V$$

Se  $P = 850 \text{ nT}$ , temos a seguinte estimativa para V:  $V = 3982 \text{ km/s}$ .

3) a) Tal fato pode ser afirmado ao analisar os espectros das regiões POS5 e POS6. Nas duas faixas espectrais analisadas, percebe-se que as regiões apresentam linhas de emissão com um mesmo padrão comparadas com POS4 adotado como repouso uma vez que se encontra no centro do disco. No caso da região POS5, as linhas se deslocam para a faixa do vermelho do espectro, indicando que este ponto está se afastando de nós. No caso de POS6, as linhas se deslocam para o azul, o que mostra que esta região se aproxima de nós.

b) Adotando a distância de M87 como  $d = 16 \text{ Mpc}$ , podemos ter a distância das posições medidas em relação à região central. Usando a escala adotada na imagem, nota-se que as regiões POS5 e POS6 apresentam distância angular de  $\alpha = 0,25''$  de arco. Desta forma, usando a relação de tamanho angular, temos que:

$$D \cdot \alpha = d \Rightarrow 16 \text{ Mpc} \cdot \left[ 0,25'' \cdot \left( \frac{1^\circ}{3600''} \right) \cdot \left( \frac{\pi \text{ rad}}{180^\circ} \right) \right] = d \quad \therefore D = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ Mpc}$$

c) Observando linhas de perfis parecidos, temos que  $\Delta\lambda = 20\text{\AA} = 2 \text{ nm}$ .

d) Se as linhas entre POS5 e POS6 estão deslocadas em  $20 \text{\AA}$ , e estes pontos estão em rotação em torno de POS4, podemos afirmar que o deslocamento Doppler, para cada uma das posições em movimento, é de  $10 \text{\AA}$ . Isto pode ser corroborado com o espectro de POS4, cujas linhas de emissão se encontra entre as linhas deslocadas de POS5 e POS6. Desta maneira, usando a relação do Efeito Doppler e uma linha de referência de POS4 (no caso, foi usado  $\lambda = 5030 \text{\AA}$ ), temos que:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{10}{5030} = \frac{v}{3 \cdot 10^5} \quad \therefore v = 5,964 \cdot 10^2 \text{ km/s}$$

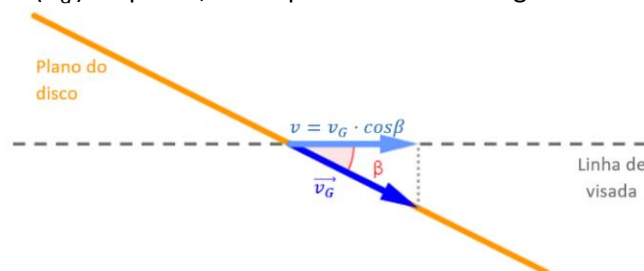
e) Admitindo que o módulo da força gravitacional de POS4 aplicada sobre um objeto de massa  $m$  em POS5 ou POS6 (que estão a uma distância  $r$  do buraco negro de massa  $M$ ) é igual ao módulo da força centrípeta, temos a seguinte relação:

$$\frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v^2 = \frac{GM}{r} \Rightarrow M = \frac{rv^2}{G}$$

Como  $r = 1,94 \cdot 10^{-5} \text{ Mpc} = 5,986 \cdot 10^{17} \text{ m}$  e  $v = 5,964 \cdot 10^5 \text{ m/s}$ , aplicando sobre a relação encontrada, temos que:

$$M = 5,986 \cdot 10^{17} \cdot \frac{(5,964 \cdot 10^5)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \quad \therefore M = 3,192 \cdot 10^{39} \text{ kg} = 1,604 \cdot 10^9 M_\odot$$

f) Se o disco está inclinado em  $35^\circ$  em relação à linha de visada, a velocidade observada seria apenas uma componente da velocidade de rotação original ( $v_G$ ) do ponto, como pode ser visto na figura abaixo:



$$\text{E como } v = v_G \cdot \cos 35^\circ \Rightarrow v_G = \frac{v}{\cos 35^\circ} = \frac{596,4}{\cos 35^\circ} \therefore v_G = 728,1 \text{ km/s}$$

Aplicando este novo valor no item anterior, temos que a massa  $M$  do buraco negro é de:

$$M = 5,986 \cdot 10^{17} \cdot \frac{(7,281 \cdot 10^5)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \therefore M = 4,758 \cdot 10^{39} \text{ kg} = 2,391 \cdot 10^9 M_\odot$$

Isto é, estaríamos **errando para menos** na massa estimada do item anterior.

g) Existem duas possibilidades para resolver este problema: admitindo que o disco não está inclinado ou admitir que existe a inclinação de  $35^\circ$ , conforme citado no item anterior.

A Magnitude absoluta  $M_G$  pode ser determinada ao ser comparada com a magnitude absoluta do Sol ( $M_\odot = +4,83$ ). Da relação entre fluxo e magnitude, temos que:

$$M_G - M_\odot = -2,5 \cdot \log \frac{F_G}{F_\odot}$$

Para a primeira situação, sem inclinação, temos que:

$$M_G - 4,83 = -2,5 \cdot \log \left( \frac{1,604 \cdot 10^9 F_\odot}{F_\odot} \right) \therefore M_G = -18,18$$

E a magnitude aparente ( $m_G$ ), pode ser obtida pelo módulo de distância, onde  $d_{pc}$  a distância de M87 em parsecs.

$$m_G - M_G = 5 \cdot \log d_{pc} - 5 \Rightarrow m = -18,18 + 5 \cdot \log(16 \cdot 10^6) - 5 \therefore m_G = +12,84$$

Para a segunda situação, inclinação de  $35^\circ$ , temos que:

$$M_G - 4,83 = -2,5 \cdot \log \left( \frac{2,391 \cdot 10^9 F_\odot}{F_\odot} \right) \therefore M_G = -18,62$$

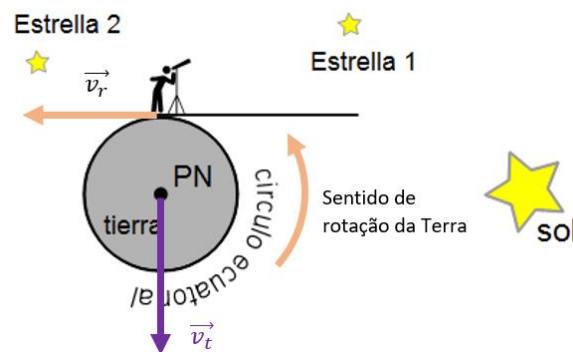
E, para a magnitude aparente:

$$m = -18,62 + 5 \cdot \log(16 \cdot 10^6) - 5 \therefore m_G = +12,40$$

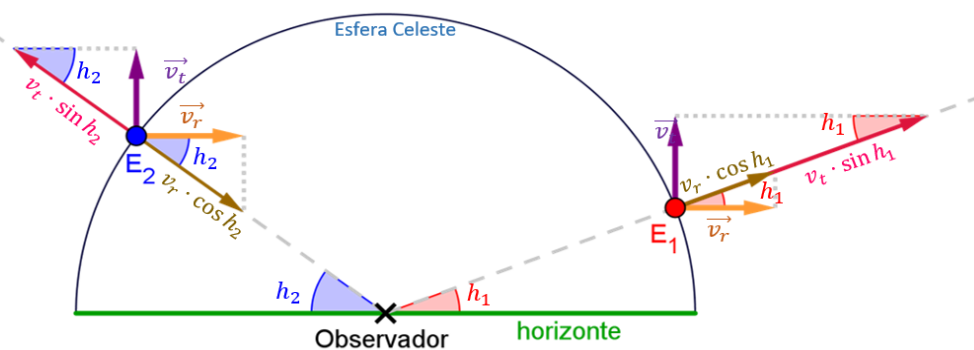
4) a) O Efeito Doppler causará o desvio das linhas observadas. Existem outros mecanismos que podem afetar a luz observada (como Espalhamento Rayleigh e refração atmosférica), mas nestes casos a luz emitida pode ser desviada ou absorvida ou espalhada.

b) O observador possui um movimento, composto pelos movimentos de rotação do planeta e da translação deste ao redor do Sol.

c) A figura abaixo mostra os vetores dos movimentos responsáveis pelos efeitos Doppler.



d) A figura a seguir mostra como o observador detecta, de acordo com sua linha de visada, os movimentos das estrelas  $E_1$  e  $E_2$ . Pelos dados do azimute, sabemos que estas estrelas estão sobre o Meridiano Local do observador, em sentidos opostos do céu.



Tomando o observador como referencial em repouso, temos que os movimentos de rotação e translação (vetores  $\vec{v}_r$  e  $\vec{v}_t$ , respectivamente) apresentam vetores com sentidos opostos. Entretanto, na linha de visada do observador (linhas tracejadas), ele só perceberá as componentes destes movimentos de acordo com a altura de cada estrela ( $h_1$  e  $h_2$ ). Desta forma, o vetor velocidade observada para  $E_1$  e  $E_2$  será:

$$\begin{cases} \text{Estrela 1: } \vec{v}_1 = v_r \cdot \cos h_1 \hat{i} + v_t \cdot \sin h_1 \hat{j} \\ \text{Estrela 2: } \vec{v}_2 = v_r \cdot \cos h_2 \hat{i} - v_t \cdot \sin h_2 \hat{j} \end{cases}$$

Como o módulo de um vetor é  $v = \sqrt{(v_i)^2 + (v_j)^2}$ , as fórmulas de desvio Doppler podem ser escritas da seguinte forma:

$$\begin{cases} \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_1)^2 + (v_t \cdot \sin h_1)^2}}{c} \\ \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v_2}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_2)^2 + (v_t \cdot \sin h_2)^2}}{c} \end{cases}$$

e) A partir da tabela do item anterior, temos os valores para  $\Delta\lambda_1$ ,  $\Delta\lambda_2$ ,  $h_1$  e  $h_2$ . Tomando como referência a linha de H $\alpha$  (656,3 nm), o sistema de equações do item anterior pode ser resolvido. Logo:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{\Delta\lambda_1}{\lambda} = \frac{v_1}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_1)^2 + (v_t \cdot \sin h_1)^2}}{c} \\ \frac{\Delta\lambda_2}{\lambda} = \frac{v_2}{c} = \frac{\sqrt{(v_r \cdot \cos h_2)^2 + (v_t \cdot \sin h_2)^2}}{c} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{0,03840}{656,3} \cdot 3 \cdot 10^5\right)^2 = (v_r \cdot \cos 35^\circ 10')^2 + (v_t \cdot \sin 35^\circ 10')^2 \\ \left(\frac{0,05291}{656,3} \cdot 3 \cdot 10^5\right)^2 = (v_r \cdot \cos 55^\circ 7')^2 + (v_t \cdot \sin 35^\circ 7')^2 \end{cases} \end{aligned}$$

Após alguns cálculos, obtém-se o seguinte sistema de equações, que levará as soluções de  $v_r$  e  $v_t$ :

$$\begin{cases} 308,1 = v_r^2 \cdot 0,6683 + v_t^2 \cdot 0,3317 \\ 584,9 = v_r^2 \cdot 0,3271 + v_t^2 \cdot 0,6729 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = 6,247 \text{ km/s} \\ v_t = 29,16 \text{ km/s} \end{cases}$$

f) Tomando o dia sideral como 23h 56min 4s ( $\approx 8,616 \cdot 10^3$  s) e o ano sideral como 365 dias 6h 9min 10s ( $\approx 3,156 \cdot 10^7$  s), para calcular a distância Terra-Sol, podemos obter a partir da velocidade média. Seja  $d_{TS}$  a distância média entre a Terra e o Sol, temos que:

$$v_t = \frac{2\pi \cdot d_{TS}}{\Delta t} \Rightarrow d_{TS} = \frac{v_t \cdot \Delta t}{2\pi} = \frac{29,16 \cdot 3,156 \cdot 10^7}{2\pi} \quad \therefore d_{TS} = 1,465 \cdot 10^8 \text{ km}$$

Para o raio da Terra, considera-se a  $v_r$  como a velocidade de rotação do planeta no Equador terrestre. E, usando o mesmo conceito do cálculo anterior:

$$v_r = \frac{2\pi \cdot r_{\text{Terra}}}{\Delta t} \Rightarrow r_{\text{Terra}} = \frac{v_r \cdot \Delta t}{2\pi} = \frac{6,247 \cdot 8,616 \cdot 10^3}{2\pi} \quad \therefore r_{\text{Terra}} = 8,566 \cdot 10^3 \text{ km}$$

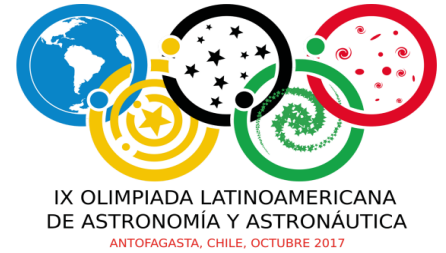
Nota: embora o raio calculado seja 2 000 km maior que o raio terrestre (6 371 km), este método mostra-se razoável para determinar o raio do planeta

g) Como a Terra está sujeita a força de atração gravitacional causada pelo Sol, esta fica presa a uma órbita circular. Igualando a aceleração gravitacional com a aceleração centrípeta, temos que:

$$\frac{GM_{\odot}}{d_{TS}^2} = \frac{v_t^2}{d_{TS}} \Rightarrow v_t^2 = \frac{GM}{d_{TS}} \Rightarrow M_{\odot} = \frac{d_{TS} v_t^2}{G} = \frac{1,465 \cdot 10^{11} \cdot (2,916 \cdot 10^4)^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow$$

$$\therefore M_{\odot} = 1,87 \cdot 10^{30} \text{ kg}$$

**IX Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
08 a 13 de outubro de 2017 – Antofagasta – Chile



**Prova Teórica Individual – Resoluções**

1) a) Entre os anos de 141 a.C. e 1802 d.C., a variação da longitude eclíptica ( $\Delta\lambda$ ) de um ponto sideral foi de:

$$\Delta\lambda = 201^{\circ}04'41'' - 174^{\circ}07'30'' \Rightarrow \Delta\lambda = 26^{\circ}57'11''$$

Logo, o deslocamento anual do ponto vernal é:

$$\omega = \frac{\Delta\lambda}{\Delta t} = \frac{26^{\circ}57'11''}{1802+141} \Rightarrow \omega = 50'' / \text{ano}$$

b) Entre os anos de 141 a.C. e 2017 d.C., temos que a variação da longitude eclíptica ( $\Delta\lambda'$ ) de um ponto qualquer na constelação de Leão foi de:

$$\omega = \frac{\Delta\lambda'}{\Delta t'} \Rightarrow \frac{50''}{1 \text{ ano}} = \frac{\Delta\lambda'}{(2017+141) \text{ ano}} \Rightarrow \Delta\lambda' = 107900'' \Rightarrow \Delta\lambda' = 30^{\circ}$$

2) Comparando a magnitude de cada uma das componentes do aglomerado com uma estrela qualquer de referência, de magnitude  $m_0 = 0$  e fluxo  $F_0$ , da equação geral de magnitudes, temos que os fluxos das estrelas do aglomerado podem ser expressos por:

$$m - m_0 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F}{F_0}\right) \Rightarrow \frac{F}{F_0} = 10^{\frac{m_0 - m}{2.5}} \Rightarrow \frac{F}{F_0} = 10^{\frac{-m}{2.5}}$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{\frac{-m_1}{2.5}} = 10^{\frac{-5.09}{2.5}} \Rightarrow \frac{F_1}{F_0} = 9,204 \cdot 10^{-3}$$

$$\frac{F_2}{F_0} = 10^{\frac{-m_2}{2.5}} = 10^{\frac{-3.62}{2.5}} \Rightarrow \frac{F_2}{F_0} = 3,564 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{F_3}{F_0} = 10^{\frac{-m_3}{2.5}} = 10^{\frac{-2.90}{2.5}} \Rightarrow \frac{F_3}{F_0} = 6,918 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{F_4}{F_0} = 10^{\frac{-m_4}{2.5}} = 10^{\frac{-3.87}{2.5}} \Rightarrow \frac{F_4}{F_0} = 2,831 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{F_5}{F_0} = 10^{\frac{-m_5}{2.5}} = 10^{\frac{-4.30}{2.5}} \Rightarrow \frac{F_5}{F_0} = 1,905 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{F_6}{F_0} = 10^{\frac{-m_6}{2.5}} = 10^{\frac{-4.18}{2.5}} \Rightarrow \frac{F_6}{F_0} = 2,128 \cdot 10^{-2}$$

$$\frac{F_7}{F_0} = 10^{\frac{-m_7}{2.5}} = 10^{\frac{-3.70}{2.5}} \Rightarrow \frac{F_7}{F_0} = 3,311 \cdot 10^{-2}$$

Como B observa o aglomerado sendo um único ponto, e não há eclipse entre as componentes, o mesmo observará a magnitude aparente combinada ( $m_C$ ) das estrelas de Olympus 010101, logo:

$$\left| \begin{array}{l} m_C - m_0 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{F_T}{F_0}\right) \\ F_T = \sum_{i=1}^7 \frac{F_i}{F_0} \end{array} \right. \Rightarrow m_C = -\frac{5}{2} \log(0,215774) \Rightarrow m_C = 1,665$$

3) Sendo  $L_s$ ,  $T_s$ , e  $R_s$ , respectivamente, a luminosidade, a temperatura e o raio do Sol; temos que a potência recebida ( $P_R$ ) pelo planeta Terra, de raio  $R_T$ , a uma distância  $d$  do, pode ser expressa por:

$$\left| \begin{aligned} F_S &= \frac{L_S}{4\pi \cdot d^2} \\ L_S &= 4\pi R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4 \Rightarrow \frac{P_R}{\pi \cdot R_T^2} = \frac{4\pi R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4}{4\pi \cdot d^2} \Rightarrow P_R = \frac{\pi \cdot R_T^2 \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4}{d^2} \\ F_S &= \frac{P_R}{\pi \cdot R_T^2} \end{aligned} \right.$$

Considerando que a Terra se comporte como um corpo negro ideal ( $\epsilon = 1$ ), no equilíbrio térmico, temos que sua temperatura ( $T_T$ ) é dada por:

$$\left| \begin{aligned} P_R &= \frac{\pi \cdot R_T^2 \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4}{d^2} \\ P_E &= \epsilon \cdot 4\pi R_T^2 \cdot \sigma \cdot T_T^4 \Rightarrow \epsilon \cdot 4\pi R_T^2 \cdot \sigma \cdot T_T^4 = \frac{\pi \cdot R_T^2 \cdot R_S^2 \cdot \sigma \cdot T_S^4}{d^2} \Rightarrow T_T = T_S \cdot \sqrt{\frac{R_S}{2d}} \\ P_E &= P_R \end{aligned} \right.$$

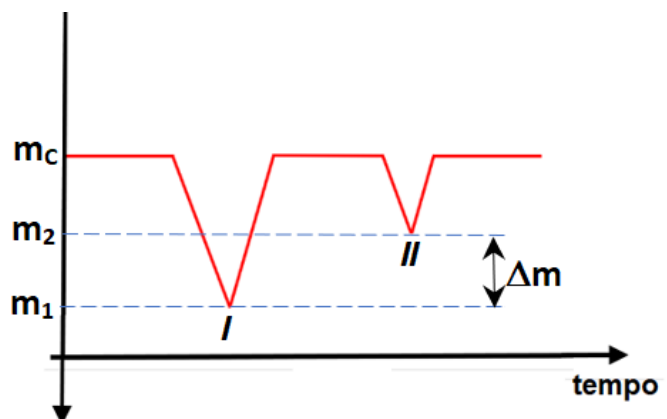
Portanto, a diferença de temperatura ( $\Delta T$ ) no planeta Terra quando esta estiver no periélio ( $T_1$ ) e no afélio ( $T_2$ ) será:

$$T_1 = T_S \cdot \sqrt{\frac{R_S}{2d_1}} = 5800 \cdot \sqrt{\frac{4,6 \cdot 10^{-3}}{2,0,98}} \Rightarrow T_1 = 280,98K$$

$$T_2 = T_S \cdot \sqrt{\frac{R_S}{2d_2}} = 5800 \cdot \sqrt{\frac{4,6 \cdot 10^{-3}}{2,1,01}} \Rightarrow T_2 = 276,78K$$

$$\Delta T = T_1 - T_2 = 280,98 - 276,78 \Rightarrow \Delta T = 4,20K$$

4) Considerando que as estrelas possuem raios iguais e o plano orbital está na direção da linha de visada, analisando o gráfico, temos que: *I* indica o mínimo primário, ou seja, a estrela mais fria eclipsa completamente a estrela mais quente; e *II* o mínimo secundário, ou seja, a estrela quente eclipsa completamente a estrela mais fria. A magnitude mínima ocorre quando não há eclipse e equivale a magnitude combinada do sistema ( $m_c$ ).



Assumindo que as estrelas estão à mesma distância do observador, da equação geral das magnitudes, temos que  $m_1$  podem ser expressos por:

$$m_C - m_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_1 + L_2}{L_1}\right) \Rightarrow m_C - m_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{L_1 + L_2}{L_1}\right) \Rightarrow m_C - m_1 = -\frac{5}{2} \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_1^4 + 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_2^4}{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T_1^4}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 = \frac{5}{2} \log\left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{T_1^4}\right) + m_C$$

Analogamente para  $m_2$ , vem:

$$m_2 = \frac{5}{2} \log\left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{T_2^4}\right) + m_C$$

Logo, a diferença entre as magnitudes ( $\Delta m$ ) será:

$$\Delta m = m_1 - m_2 = m_C - m_2 = \frac{5}{2} \log\left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{T_1^4}\right) + m_C - \frac{5}{2} \log\left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{T_2^4}\right) - m_C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta m = \frac{5}{2} \left[ \log\left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{T_1^4}\right) - \log\left(\frac{T_1^4 + T_2^4}{T_2^4}\right) \right] \Rightarrow \Delta m = \frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{T_2^4}{T_1^4}\right) \Rightarrow \Delta m = 10 \cdot \log\left(\frac{T_2}{T_1}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta m = 10 \cdot \log\left(\frac{12000}{5000}\right) \Rightarrow \Delta m = 3,80$$

### Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) e b) A partir da relação entre o período sinódico e sidereal apresentada no enunciado e sabendo que  $P^2 = a^3$ , temos:

Planeta	Período Sidereal (anos)	Período Sinódico (dias)	Semieixo maior (ua)
Mercúrio	<b>0,24</b>	115,88	<b>0,386</b>
Vênus	<b>0,615</b>	584,00	<b>0,723</b>
Terra	1,0	----	<b>1,0</b>
Marte	<b>1,88</b>	780,00	<b>1,52</b>
Júpiter	11,9	<b>398,79</b>	<b>5,2</b>
Saturno	<b>29,65</b>	378,00	<b>9,58</b>
Urano	84,1	<b>369,65</b>	<b>19,19</b>
Netuno	<b>133,82</b>	368,00	<b>26,16</b>

c) Sendo a massa de Júpiter  $M_J$  e a massa de Io  $m_I$ , da 3ª Lei de Kepler, temos:

$$P^2 = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{a^3}{(M_J + m_I)} \Rightarrow (M_J + m_I) = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{P^2 G} = \frac{4\pi^2 \cdot (4,21 \cdot 10^8)^3}{(1,77 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (M_J + m_I) = 1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

d) Considerando que a massa de Io é desprezível em relação a massa de Júpiter, temos que:

$$M_J = 1,89 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

2) a) (i) Da equação da Lei da Gravitação Universal, temos que a força gravitacional que a Terra exerce sobre a Lua ( $F_{T-L}$ ) é:

$$F_{T-L} = \frac{G \cdot M_T \cdot m_L}{d_{T-L}^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 5,98 \cdot 10^{24} \cdot 7,35 \cdot 10^{22}}{(3,84 \cdot 10^8)^2} \Rightarrow F_{T-L} = 1,988 \cdot 10^{20} \text{ N}$$

(ii) Da 3ª Lei de Newton, temos que toda ação corresponde a uma reação de mesmo módulo. Logo, a intensidade da força gravitacional que a Lua exerce sobre a Terra ( $F_{L-T}$ ) é **1,988.10<sup>20</sup> N**.

b) Da Lei da Gravitação Universal de Newton, temos:

$$\frac{F_{T-S}}{F_{T-L}} = \frac{\frac{G \cdot M_T \cdot M_S}{d_{T-S}^2}}{\frac{G \cdot M_T \cdot m_L}{d_{T-L}^2}} \Rightarrow \frac{F_{T-S}}{F_{T-L}} = \frac{M_S}{m_L} \cdot \left( \frac{d_{T-L}}{d_{T-S}} \right)^2 = \frac{1,99 \cdot 10^{30}}{7,35 \cdot 10^{22}} \cdot \left( \frac{3,84 \cdot 10^8}{1,5 \cdot 10^{11}} \right)^2 \Rightarrow \frac{F_{T-S}}{F_{T-L}} = 177,4$$

c) (i) Considerando que NGC2207 tem massa  $M_2$  e IC2163 tem massa  $M_1$  e diâmetro  $D_1$ , temos que o parâmetro  $Q_{2-1}$  é:

$$Q_{2-1} = \log \left[ \left( \frac{M_2}{M_1} \right) \cdot \left( \frac{D_1}{d} \right)^3 \right] = \log \left[ \left( \frac{1,16 \cdot 10^{10}}{7,28 \cdot 10^9} \right) \cdot \left( \frac{28,76}{23,40} \right)^3 \right] \Rightarrow Q_{2-1} = 0,471$$

(ii) Considerando que IC2163 tem massa  $M'_2$  e NGC2207 tem massa  $M'_1$  e diâmetro  $D'_1$ , temos que o parâmetro  $Q_{1-2}$  é:

$$Q_{1-2} = \log \left[ \left( \frac{M'_2}{M'_1} \right) \cdot \left( \frac{D'_1}{d} \right)^3 \right] = \log \left[ \left( \frac{7,28 \cdot 10^9}{1,16 \cdot 10^{10}} \right) \cdot \left( \frac{31,33}{23,40} \right)^3 \right] \Rightarrow Q_{1-2} = 0,178$$

Analisando os dados, verificamos que tanto a massa quanto o diâmetro de NGC2207 são maiores do que o da galáxia IC2163. Consequentemente, temos que o parâmetro  $Q_{2-1}$  é necessariamente maior que  $Q_{1-2}$ .

d) Considerando que as massas das duas galáxias são praticamente iguais (cerca de  $1 \cdot 10^{12}$  massas solares), temos que a equação do parâmetro da força de maré se reduz a:

$$Q = \log \left[ \left( \frac{D_1}{d} \right)^3 \right]$$

Considerando que as galáxias são formadas por estrelas iguais ao Sol, cuja magnitude absoluta é  $M_{Sol} = 4,83$ , da equação geral das magnitudes, temos que a absoluta da galáxia de Andrômeda  $M_A$  é:

$$M_A - M_{Sol} = -2,5 \cdot \log \left( \frac{L_A}{L_{Sol}} \right) \Rightarrow M_A - 4,83 = -2,5 \cdot \log \left( \frac{10^{12} L_{Sol}}{L_{Sol}} \right) \Rightarrow M_A = -25,17$$

Sabendo que a magnitude aparente de Andrômeda é  $m_A = 3,45$ , da equação de Pogson, temos que a distância  $d$  entre as galáxias é:

$$m_A - M_A = 5 \cdot \log d - 5 \Rightarrow 3,45 + 25,17 = 5 \cdot \log d - 5 \Rightarrow d = 5,3 \cdot 10^6 \text{ pc}$$

Comparando as informações referentes as galáxias NGC2207 e IC2163, estima-se que o diâmetro da galáxia de Andrômeda é cerca de  $D_1 = 30 \text{ kpc}$ . Logo, o parâmetro da força de maré entre a Via Láctea e a galáxia de Andrômeda é próximo de:

$$Q = \log \left[ \left( \frac{D_1}{d} \right)^3 \right] = \log \left[ \left( \frac{30 \cdot 10^3}{5,3 \cdot 10^6} \right)^3 \right] \Rightarrow \boxed{Q = -6,74}$$

**OBS:** Trata-se de uma estimativa. Valores entre  $-2 < Q < -12$ , desde que justificados corretamente, serão aceitos com a pontuação integral.

3) a) A velocidade tangencia da estrela Barnard, em km/s, é:

$$v_t = 4,74 \cdot \mu \cdot d = 4,47 \cdot \frac{41,44}{4} \cdot 1,83 \Rightarrow \boxed{v_t = 89,86 \text{ km/s}}$$

b) Da equação do Efeito Doppler, temos:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{v_r}{3 \cdot 10^5} = \frac{516,45 - 516,63}{516,63} \Rightarrow \boxed{|v_r| = 104,52 \text{ km/s}}$$

c) A estrela está se **aproximando**, pois o comprimento de onda da linha espectral observada é menor quando comparada com a mesma linha observada em um laboratório em repouso ( $\lambda < \lambda_0$ ).

d) A velocidade real da estrela é:

$$v^2 = v_t^2 + v_r^2 = (89,86)^2 + (104,52)^2 \Rightarrow \boxed{v = 137,84 \text{ km/s}}$$

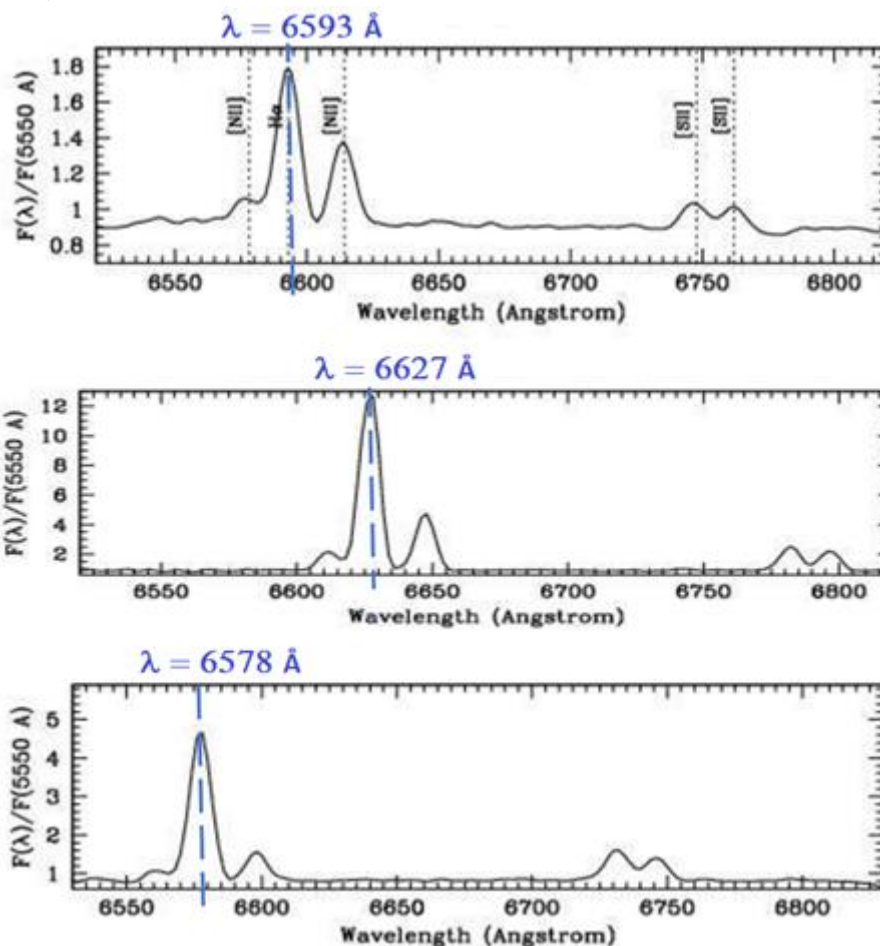
4) a) Como o *redshift* é menor que 0,1, temos:

$$\frac{H_0 \cdot D}{c} = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \Rightarrow \frac{73 \cdot D}{3 \cdot 10^5} = \frac{401,8 - 393,3}{393,3} \Rightarrow \boxed{D = 88,82 \text{ Mpc}}$$

b) Como o *redshift* é maior que 0,1, temos:

$$H_0 \cdot D' = \left[ \frac{(z+1)^2 - 1}{(z+1)^2 + 1} \right] \cdot c \Rightarrow 73 \cdot D' = \left[ \frac{(1,7+1)^2 - 1}{(1,7+1)^2 + 1} \right] \cdot 3 \cdot 10^5 \Rightarrow \boxed{D' = 311813 \text{ Mpc}}$$

c) Analisando os gráficos, temos:



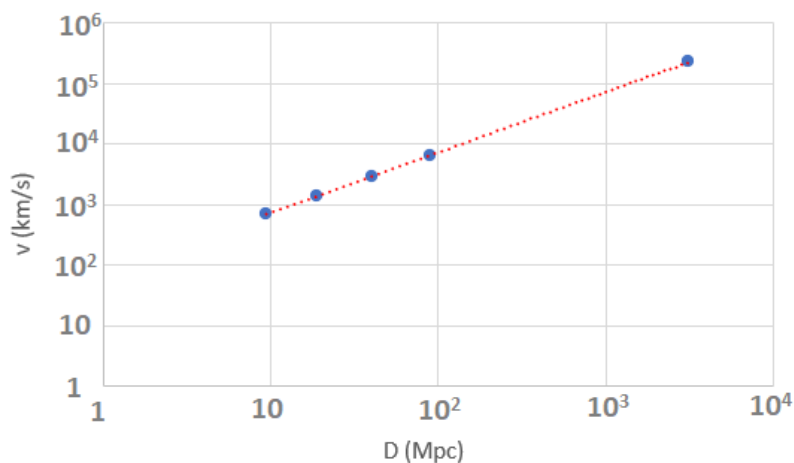
A partir das relações apresentadas no enunciado, vem:

Galáxia	$\lambda(\text{\AA})$	$z$	$v$ (km/s)	$D$ (Mpc)
NGC4750	6 593	<b>0,0046</b>	<b>1 380</b>	<b>18,90</b>
NGC7714	<b>6 627</b>	<b>0,0098</b>	<b>2 940</b>	<b>40,27</b>
NGC4631	<b>6 578</b>	<b>0,0023</b>	<b>690</b>	<b>9,45</b>

d) A partir dos dados dos itens anteriores, temos:

Objeto	$v$ (km/s)	$D$ (Mpc)
NGC4631	690	9,45
NGC4750	1 380	18,90
NGC7714	2 940	40,27
NGC4889	6 483	88,82
SN1997ff	227 000	3 118,30

Analisando os dados, conclui-se que quanto mais afastado o objeto, maior será sua velocidade de recessão. Logo, podemos afirmar que o nosso universo está em expansão acelerada.



## X Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica

14 a 20 de outubro de 2018 – Ayolas – Paraguai

### Prova Teórica Individual – Resoluções

1) De acordo com o enunciado, temos as seguintes informações:

$$V_1 = V_2, r_1 = \frac{d}{4}, r_2 - r_1 = 519,84 \text{ km}, \rho_1 = 9 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \text{ e } \rho_3 = 3 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$$

a) Para obter a aceleração na superfície do planeta, devemos obter a massa total deste corpo, assim como as espessuras das cascas que envolvem o núcleo (figura 1). Portanto, temos o seguinte sistema de equações, considerando as massas de cada camada e suas respectivas densidades.

$$\begin{cases} M_1 = \rho_1 \cdot V_1 = \rho_1 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3 \\ M_2 = \rho_2 \cdot V_2 = \rho_2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi (r_2^3 - r_1^3) \\ M_3 = \rho_3 \cdot V_3 = \rho_3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi (r_3^3 - r_2^3) \end{cases}$$

Da comparação entre  $V_1$  e  $V_2$ , temos que:

$$\frac{4}{3} \cdot \pi (r_2^3 - r_1^3) = \frac{4}{3} \cdot \pi r_1^3 \Rightarrow r_2^3 = 2r_1^3 \therefore r_2 = \sqrt[3]{2} r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 - r_1 = 519,84 \Rightarrow 1,26r_1 - r_1 = 519,84 \therefore r_1 = \mathbf{1\,999,38 \text{ km}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_2 = 1,26 r_1 \therefore r_2 = \mathbf{2\,519,22 \text{ km}}$$

Da relação entre o diâmetro e o raio do núcleo do planeta, temos que:

$$r_1 = \frac{d}{4} = \frac{2r_3}{4} \Rightarrow r_3 = 2r_1 \therefore r_3 = \mathbf{3\,998,76 \text{ km}}$$

Aplicando os valores de  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  nas massas, obtemos que:

$$\begin{cases} M_1 = 9,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (2,00 \cdot 10^6)^3 \\ M_2 = 5,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot [(2,52 \cdot 10^6)^3 - (2,00 \cdot 10^6)^3] \\ M_3 = 3,00 \cdot 10^3 \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi [(4,00 \cdot 10^6)^3 - (2,52 \cdot 10^6)^3] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1 \approx 3,02 \cdot 10^{23} \text{ kg} \\ M_2 \approx 1,67 \cdot 10^{23} \text{ kg} \\ M_3 \approx 6,03 \cdot 10^{23} \text{ kg} \end{cases}$$

$$\therefore M_{TOTAL} = M_1 + M_2 + M_3 = \mathbf{1,07 \cdot 10^{24} \text{ kg}}$$

Portanto, na superfície do planeta, a aceleração  $g_s$  será de:

$$g_s = \frac{GM}{r_3^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1,07 \cdot 10^{24}}{(4 \cdot 10^6)^2} \therefore g_s = \mathbf{4,47 \text{ m/s}^2}$$



Figura 1

b) Por simetria, no centro do planeta, toda a massa está distribuída ao redor deste ponto. Portanto, considerando que as camadas que constituem o planeta sejam homogêneas, podemos afirmar que  $g_{centro} = 0$ .

c) De maneira análoga ao item anterior, apenas o núcleo e a camada intermediária exercerão atração gravitacional sobre a separação entre a camada intermediária e a camada externa do planeta. Desta maneira, teremos o seguinte valor:

$$g_{int} = \frac{G(M_1 + M_2)}{r_2^2} = \frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (3,02 \cdot 10^{23} + 1,67 \cdot 10^{23})}{(2,52 \cdot 10^6)^2} \quad \therefore g_{int} \approx 4,92 \text{ m/s}^2$$

2) a) No caso, o processo de deslocamento da linha de 5 985 Å ocorre a cada 7 dias. Portanto, podemos afirmar que o período de translação da estrela será de **7 dias**.

b) A partir do efeito Doppler, obtemos as velocidades de aproximação e afastamento da estrela em relação a nossa linha de visada.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c} \Rightarrow \begin{cases} v_{azul} = \frac{5\,975 - 5\,985}{5\,985} \cdot 3 \cdot 10^8 \\ v_{red} = \frac{6\,000 - 5\,985}{5\,985} \cdot 3 \cdot 10^8 \end{cases} \therefore \begin{cases} v_{azul} = -5,01 \cdot 10^5 \text{ m/s} \\ v_{red} = 7,52 \cdot 10^5 \text{ m/s} \end{cases}$$

Aplicando a 2ª Lei de Kepler, sabemos que a velocidade orbital da estrela será máxima no periélio e a mínima no afélio, o que nos permite concluir:

$$\begin{cases} v_a = 5,01 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ v_p = 7,52 \cdot 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

c) A partir das velocidades do afélio e do periélio, é possível obter a excentricidade ( $e$ ) da órbita estelar. Para isso, podemos deduzir a razão a partir da expressão da velocidade orbital.

$$v(r) = \sqrt{GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)}, \text{ onde } \begin{cases} r_p = a(1 - e) \\ r_a = a(1 + e) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(r_p) = v_p = \sqrt{GM \left[ \frac{2}{a(1 - e)} - \frac{1}{a} \right]} \\ v(r_a) = v_a = \sqrt{GM \left[ \frac{2}{a(1 + e)} - \frac{1}{a} \right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left[ \frac{2 - (1 - e)}{(1 - e)} \right]} \\ v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left[ \frac{2 - (1 + e)}{(1 + e)} \right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)} \\ v_a = \sqrt{\frac{GM}{a} \left( \frac{1 - e}{1 + e} \right)} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \sqrt{\frac{\left( \frac{1 + e}{1 - e} \right)}{\left( \frac{1 - e}{1 + e} \right)}} \Rightarrow \frac{v_p}{v_a} = \frac{1 + e}{1 - e} \Rightarrow \frac{7,52 \cdot 10^5}{5,01 \cdot 10^5} = \frac{1 + e}{1 - e} \Rightarrow 7,52 - 7,52e = 5,01 + 5,01e \quad \therefore e = 0,20$$

3) a) Para obter a magnitude absoluta de cada sistema binário, devemos calcular as magnitudes aparentes destes. No caso das estrelas com magnitudes  $m_a = +1$  e  $m_b = +2$ , obtemos a relação entre os fluxos da Equação geral das magnitudes.

$$m_a - m_b = -2,5 \cdot \log \left( \frac{F_a}{F_b} \right) \Rightarrow 1 - 2 = -2,5 \cdot \log \left( \frac{F_a}{F_b} \right) \Rightarrow F_a = F_b \cdot 10^{0,4} \therefore F_a = 2,512 F_b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{ab} - m_b = -2,5 \cdot \log \left( \frac{F_a + F_b}{F_b} \right) \Rightarrow m_{ab} = 2 - 2,5 \cdot \log(3,512) \therefore m_{ab} \approx 0,64$$

Para a magnitude absoluta  $M_{ab}$ , utiliza-se a Equação de Pogson.

$$m_{ab} - M_{ab} = 5 \cdot \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow M_{ab} = 0,64 + 5 - 5 \cdot \log\left(\frac{20}{3,26}\right) \quad \therefore M_{ab} \approx 1,92$$

De forma análoga, para as estrelas com magnitudes  $m_c = 3$  e  $m_d = 4$ , temos que:

$$m_c - m_d = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_c}{F_d}\right) \Rightarrow F_c = F_d \cdot 10^{0,4} \therefore F_c = 2,512 F_d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{cd} - m_d = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_c + F_d}{F_d}\right) \Rightarrow m_{cd} = 4 - 2,5 \cdot \log(3,512) \therefore m_{cd} = 2,64$$

$$\Rightarrow m_{cd} - M_{cd} = 5 \cdot \log(d_{pc}) - 5 \Rightarrow M_{cd} = 2,64 + 5 - 5 \cdot \log\left(\frac{60}{3,26}\right) \quad \therefore M_{cd} \approx 1,31$$

b) A magnitude aparente das quatro estrelas ( $m_{SIST}$ ) pode ser determinada pela equação geral das magnitudes.

$$m_{ab} - m_{cd} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{ab}}{F_{cd}}\right) \Rightarrow 0,64 - 2,64 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{ab}}{F_{cd}}\right) \Rightarrow \frac{F_{ab}}{F_{cd}} = 10^{0,8} \therefore F_{ab} = 6,31 F_{cd} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_{SIST} - m_{cd} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_{ab} + F_{cd}}{F_{cd}}\right) \Rightarrow m_{SIST} = 2,64 - 2,5 \cdot \log(7,31) \quad \therefore m_{SIST} = 0,48$$

4) A estrutura descrita pelo enunciado do problema é vista na figura 2.

a) Como o telescópio está orientado para o ponto cardinal Sul, ao atingir a culminação, a estrela também estará na direção Sul. Usando o critério do problema, temos que  $A = 0$ .

b) Ao culminar no campo de visão do telescópio, a estrela estará com altura equivalente ao ângulo entre o telescópio e o horizonte. Pela figura 2, concluímos que:

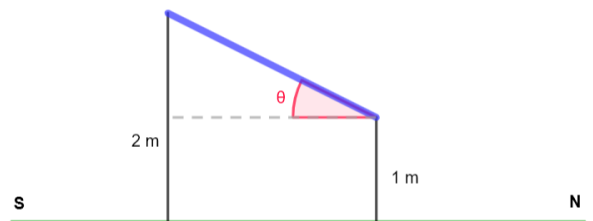


Figura 2

$$\tan \theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = h_* = 26^\circ 33' 54''$$

c) Ao comparar com a latitude do local ( $\phi = 27^\circ 19' S$ ), percebe-se que a estrela está abaixo do Polo Celeste Sul. Portanto, ela se encontra na culminação inferior e, desta forma,  $H = 12 h$ .

d) Para determinar a ascensão reta da estrela, podemos compará-la com o Tempo Sideral Local (TSL).

$$TSL = H + \alpha$$

O TSL pode ser determinado através da longitude ( $\lambda$ ) e do Tempo Sideral de Greenwich (TSG):

$$TSG + \lambda = TSL \Rightarrow TSL = 01 h 16 min + (56^\circ 21') = 01 h 16 min + 03 h 45 min 24 s \therefore TSL = 05 h 01 min 24 s \Rightarrow 05 h 01 min 24 s = 12 h 00 min + \alpha \quad \therefore \alpha = 17 h 01 min 24 s$$

e) A declinação da estrela pode ser determinada pela distância polar ( $\Delta$ ), como pode ser visto na figura 3. Lembrando que a distância polar é um ângulo suplementar à declinação ( $\delta$ ), temos que:

$$\Delta = 90^\circ - \delta = \phi - h \Rightarrow 90^\circ - \delta = 27^\circ 19' - 26^\circ 33' 54'' \Rightarrow$$

$$\therefore \delta = -89^\circ 14' 54''$$

Lembrando que, pelo fato da estrela estar entre o Equador e o Polo Sul Celeste, a coordenada da estrela apresentará sinal negativo.

f) Da figura 3:  $\Delta = 27^\circ 19' - 26^\circ 33' 54'' \quad \therefore \Delta = 0^\circ 45' 06''$ .



Figura 3

g) Como a estrela cruza o meridiano local numa posição abaixo do polo celeste visível, ela se encontra em **culminação inferior**.

h) O telescópio citado no enunciado é um telescópio Kepleriano, ou seja, a imagem observada na ocular será invertida em relação à observação a olho nu. Entretanto, o movimento da estrela dentro do campo de visão do telescópio será no sentido horário, conforme indicado com a seta amarela na figura 4.

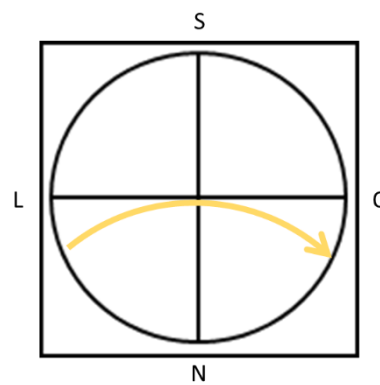


Figura 4

5) a) A partir da 3ª Lei de Kepler, temos que:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_P} \Rightarrow M_P = \frac{4\pi^2}{G} \cdot \frac{R^3}{T^2} = \frac{4 \cdot (3,14)^2 \cdot (2,00 \cdot 10^6)^3}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (100,60)^2}$$

$$\therefore M_P = 1,31 \cdot 10^{23} \text{ kg}$$

b) Considerando a órbita circular, teremos que a velocidade da nave pode ser descrita relacionando a força de atração gravitacional como a força que mantém a nave em órbita (força centrípeta). Desta forma, temos:

$$\frac{GM_P m}{R^2} = \frac{mv_{orb}^2}{R} \Rightarrow v_{orb} = \sqrt{\frac{GM_P}{R}} = \sqrt{\frac{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,31 \cdot 10^{23}}{2 \cdot 10^6}} \quad \therefore v_{orb} \approx 2,09 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 2,09 \text{ km/s}$$

c) Para a órbita de escape, basta que a nave adquira velocidade suficiente para que a sua energia mecânica seja zero, isto é, teremos que:

$$E_{TOT} = \frac{mv_{esc}^2}{2} - \frac{GM_P m}{R} \Rightarrow v_{esc} = \sqrt{\frac{2GM_P}{R}} = \sqrt{2} \cdot v_{orb}$$

Portanto, a variação da energia cinética necessária que a nave deve adquirir será:

$$\Delta E_{cin} = \frac{mv_{esc}^2}{2} - \frac{mv_{orb}^2}{2} = \frac{m}{2} (2v_{orb}^2 - v_{orb}^2) \Rightarrow \Delta E_{cin} = \frac{9 \cdot 10^3}{2} \cdot (2,09 \cdot 10^3)^2 \quad \therefore \Delta E_{cin} \approx 1,97 \cdot 10^{10} \text{ J}$$

## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) Com os dados do enunciado, obtém-se a magnitude absoluta da galáxia usando a calibragem de Feast e Catchpole (1997).

$$84,7 = 10^{-\frac{M_V + 1,43}{2,80}} \Rightarrow -M_V = 2,8 \cdot \log(84,7) - 1,43 \quad \therefore M_V = -3,97$$

Pela Equação de Pogson, temos que:

$$m_V - M_V = 5 \cdot \log d_{pc} - 5 \Rightarrow 20,2 - (-3,97) = 5 \cdot \log d_{pc} - 5 \Rightarrow d_{pc} = 10^{5,83} \quad \therefore d_{pc} \approx 6,82 \cdot 10^5 \text{ pc}$$

b) Pela Lei de Afastamento de Hubble e usando os dados do enunciado:

$$v = H_0 \cdot d_{kpc} \Rightarrow v = 71 \cdot (0,682) \quad \therefore v = 48,4 \text{ km/s}$$

c) Combinando a Lei de Wien com o afastamento Doppler, concluímos que:

$$\left| \frac{\lambda \cdot T = b}{\frac{\lambda_{obs} - \lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}} \Rightarrow \frac{\lambda_{obs}}{\lambda} - 1 = \frac{v}{c} \Rightarrow \frac{b}{T_{obs}} \cdot \frac{T}{b} - 1 = \frac{v}{c} \therefore \frac{T}{T_{obs}} = 1 + v/c \right.$$

d) Aplicando os valores do enunciado e aqueles obtidos nos tópicos anteriores, temos que:

$$\frac{T}{T_0} = 1 + \frac{48,4}{3 \cdot 10^5} \Rightarrow T = 2,73 \cdot (1,00016) \therefore T \approx 2,73 \text{ K}$$

3) a) A figura 5 apresenta um diagrama das velocidades a serem aplicadas para efetuar a transferência orbital, considerando que a altura  $h$  é menor do que  $h_{pl}$ , que é a altura da órbita “planetoestacionária” em relação ao solo. No caso, os vetores que representam as velocidades  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$  estão fora de escala.

b) Tendo como base os valores de  $G, M, R_p, P$  e  $h$ :

i. Pela 3ª Lei de Kepler, obtemos o valor de  $R$ .

$$\frac{P^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM} \therefore R = \sqrt[3]{\frac{GMP^2}{4\pi^2}}$$

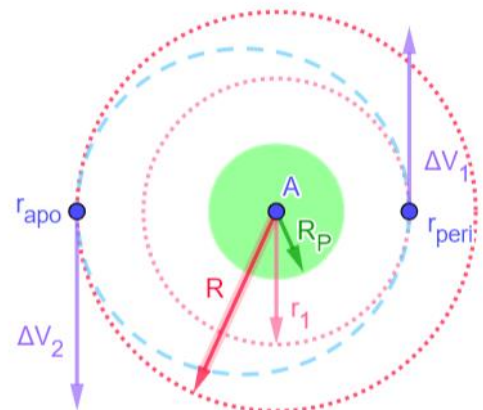


Figura 5

ii. Para  $\Delta V_1$  e  $\Delta V_2$ , devemos calcular os parâmetros da órbita elíptica de transferência. Pela figura 5, temos que o semieixo maior da órbita será  $a = (R + R_p + h)/2$ . Além disso, a órbita inferior deve ser o ponto de periastron, enquanto a órbita superior deve ser o apoastro da elipse.

As velocidades orbitais que a nave deve ter nas órbitas circulares será de:

$$v_{r_1} = \sqrt{\frac{GM}{R_p + h}} \text{ e } v_R = \sqrt{\frac{GM}{R}} = \sqrt{GM \cdot \left(\frac{4\pi^2}{GMP^2}\right)^{\frac{1}{3}}} \therefore v_R = \sqrt{\left(\frac{2\pi GM}{P}\right)^{\frac{2}{3}}}$$

Para a velocidade na órbita elíptica, utilizamos a expressão da velocidade em função do raio-vetor.

$$v(r) = \sqrt{GM \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)} \Rightarrow \begin{cases} v(r_{peri}) = \sqrt{GM \left[\frac{2}{(R_p + h)} - \frac{2}{(R + R_p + h)}\right]} \\ v(r_{apo}) = \sqrt{GM \left[\frac{2}{R} - \frac{2}{(R + R_p + h)}\right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(r_{peri}) = \sqrt{GM \left[\frac{2}{(R_p + h)} - \frac{2}{(R + R_p + h)}\right]} \\ v(r_{apo}) = \sqrt{GM \left[\frac{2}{R} - \frac{2}{(R + R_p + h)}\right]} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(r_{peri}) = \sqrt{2GM \left[ \frac{R + R_p + h - (R_p + h)}{(R_p + h)(R + R_p + h)} \right]} \\ v(r_{apo}) = \sqrt{2GM \left[ \frac{R + R_p + h - R}{R(R + R_p + h)} \right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(r_{peri}) = \sqrt{2GM \left[ \frac{R}{(R_p + h)(R + R_p + h)} \right]} \\ v(r_{apo}) = \sqrt{2GM \left[ \frac{R_p + h}{R(R + R_p + h)} \right]} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} v(r_{peri}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{(R_p + h)} \left[ \frac{R}{(R + R_p + h)} \right]} \\ v(r_{apo}) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{GM}{R} \left[ \frac{R_p + h}{(R + R_p + h)} \right]} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v(r_{peri}) = \sqrt{2} \cdot v_{r_1} \cdot \sqrt{\frac{R}{(R + R_p + h)}} \\ v(r_{apo}) = \sqrt{2} \cdot v_R \cdot \sqrt{\frac{R_p + h}{(R + R_p + h)}} \end{cases}$$

Desta forma, para obter os impulsos tangentes, temos que:

$$\begin{cases} \Delta V_1 = v(r_{peri}) - v_{r_1} \\ \Delta V_2 = v_R - v(r_{apo}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta V_1 = v_{r_1} \left[ \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{(R + R_p + h)}} - 1 \right] \\ \Delta V_2 = v_R \left[ 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{R_p + h}{(R + R_p + h)}} \right] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_p + h}} \left[ \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{R}{(R + R_p + h)}} - 1 \right] \\ \Delta V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \left[ 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{R_p + h}{(R + R_p + h)}} \right] \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_p + h}} \left[ \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{R_p + h}{R}\right)}} - 1 \right] \\ \Delta V_2 = \sqrt{\frac{GM}{R}} \left[ 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{R}{R_p + h} + 1\right)}} \right] \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} \Delta V_1 = \sqrt{\frac{GM}{R_p + h}} \left[ \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(1 + \frac{R_p + h}{\sqrt[3]{\frac{GMP^2}{4\pi^2}}}\right)}} - 1 \right] \\ \Delta V_2 = \sqrt{\left(\frac{2\pi GM}{P}\right)^{\frac{2}{3}}} \cdot \left[ 1 - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt[3]{\frac{GMP^2}{4\pi^2}}}{R_p + h} + 1\right)}} \right] \end{cases}$$

iii. Novamente, utilizando a 3ª Lei de Kepler, teremos que o tempo de transferência  $\Delta t$  será  $\Delta t = T_{orb}/2$ , então:

$$\frac{T_{orb}^2}{a^3} = \frac{P^2}{R^3} \Rightarrow \frac{T_{orb}^2}{\left(\frac{R + R_p + h}{2}\right)^3} = \frac{P^2}{R^3} \Rightarrow T_{orb} = P \cdot \left[ \frac{1}{R} \cdot \frac{R + R_p + h}{2} \right]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2} P \cdot \left[ \frac{1}{2} \left(1 + \frac{R_p + h}{R}\right) \right]^{\frac{3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta t = \frac{1}{2} P \cdot \left\{ \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{R_p + h}{\left(\frac{GMP^2}{4\pi^2}\right)^{\frac{1}{3}}} \right] \right\}^{\frac{3}{2}} \therefore \Delta t = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} P \left[ 1 + \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{R_p + h}{\sqrt[3]{GM}} \right]^{\frac{3}{2}}$$

iv. Sendo  $c$  a distância focal, temos:

$$c = \frac{R + R_p + h}{2} - (R_p + h) \Rightarrow c = \frac{R - R_p - h}{2}$$

Para a excentricidade  $e$ , vem:

$$e = \frac{c}{a} = \left( \frac{R - R_p - h}{2} \right) \cdot \left( \frac{2}{R + R_p + h} \right) = \frac{R - R_p - h}{R + R_p + h} \quad \therefore e = \frac{\sqrt[3]{\frac{GMP^2}{4\pi^2}} - R_p - h}{\sqrt[3]{\frac{GMP^2}{4\pi^2}} + R_p + h}$$

3) Analisando a tabela, temos que a declinação do Sol no dia 15 de outubro é  $\delta_{\odot} = -8^{\circ} 37' 23''$ . Através do triângulo esférico de posição (Polo Celeste Sul – Sol – Zênite, figura 6), na situação em que o Sol está nascendo (isto é, com distância zenital de  $90^{\circ}$ ), temos que o valor de  $\theta$  é:

$$\cos(90^{\circ} - |\delta|) = \cos(90^{\circ} - |\phi|) \cdot \cos(90^{\circ}) + \sin(90^{\circ} - |\phi|) \cdot \sin(90^{\circ}) \cdot \cos|\theta| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin|\delta| = \cos(27^{\circ} 24') \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0,1688$$

$$\therefore \theta = 80^{\circ} 16' 38,5''$$

Como o ângulo formado pelo Sol e o Ponto Cardeal Sul é igual a  $\theta$ , da situação representada no enunciado, temos que o comprimento  $L$  do pier é, aproximadamente,

$$\tan\theta = \frac{L}{100} \Rightarrow L = 100 \tan(80^{\circ} 16' 38,5'') \quad \therefore L \approx 585 \text{ m}$$

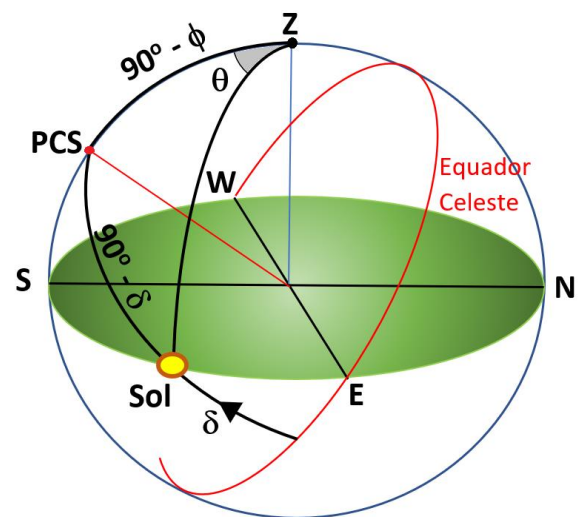


Figura 6

4) A figura 7 apresenta todos os requisitos solicitados no diagrama HR. Alguns dos termos e fases são descritos a seguir:

**Track de Hayashi:** estágio de Pré-Sequência Principal. Início da queima do hidrogênio.

**Atualmente:** queima do hidrogênio no núcleo. Localização do Sol na Sequência Principal.

**Gigante Vermelha:** fim da queima de hidrogênio do núcleo. Reestruturação da estrela por conta do Equilíbrio hidrostático. O hidrogênio começa a queimar ao redor da estrela.

**Helium Flash:** momento em que o hélio começa a queimar no núcleo.

**Ramo Assintótico das Gigantes (fase AGB):** estágio em que, ao mesmo tempo, várias camadas no interior da estrela competem entre si para produzir energia (em geral, camadas de hidrogênio e hélio se competem).

**Nebulosa Planetária:** ejeção das camadas externas da estrela.

**Anã Branca:** estágio final do Sol.

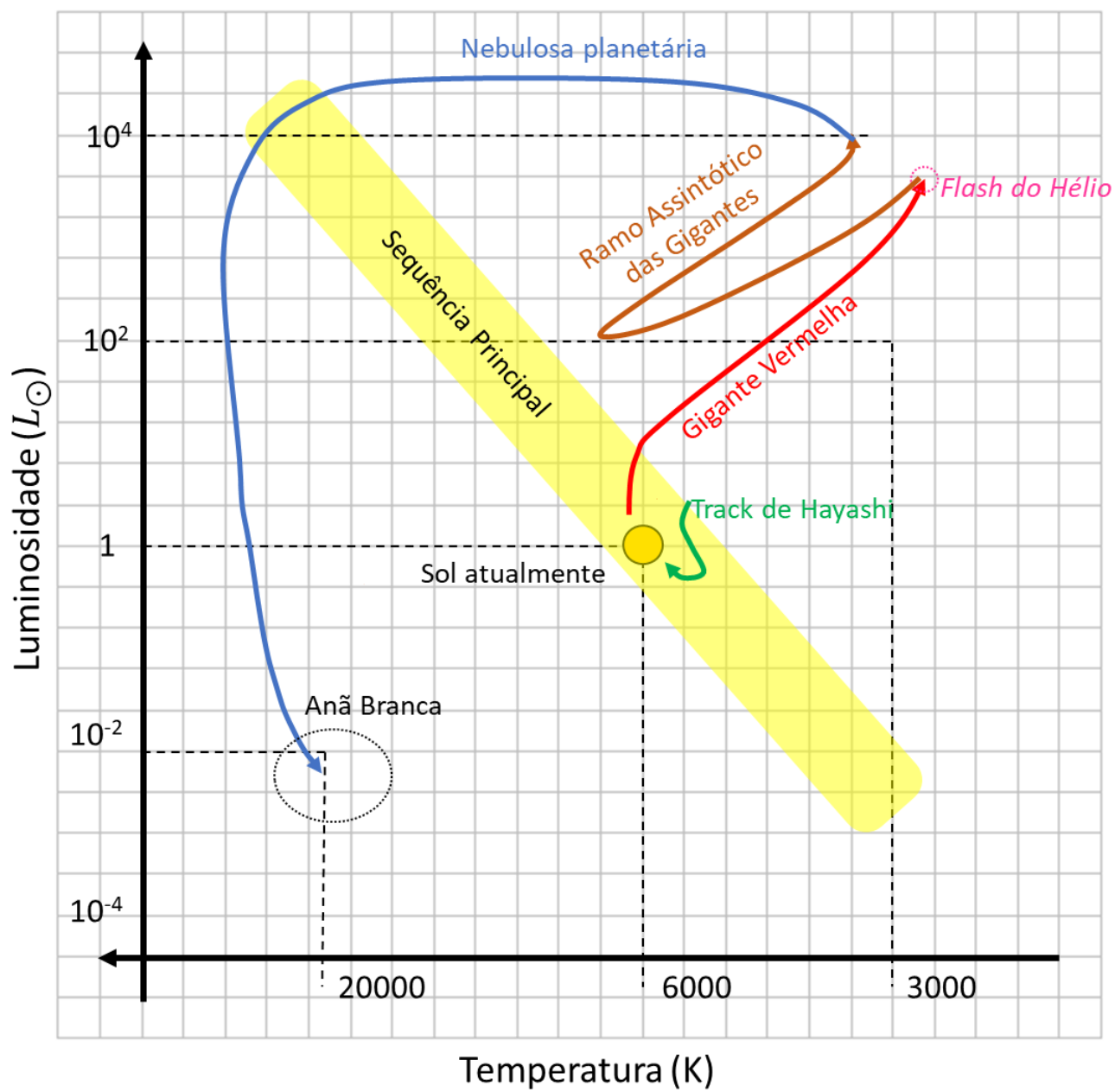


Figura 7

**XI Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica**  
 21 a 25 de outubro de 2019 – Puebla – México



**Prova Teórica Individual - Resoluções**

1) a) A resolução angular do telescópio JWST ( $\theta_J$ ) é dada por:

$$\theta_J = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_J} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{6,5} \Rightarrow \theta_J = 1,03 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

b) Considerando a resolução angular pequena, temos que  $\text{tg}\theta \approx \theta$ . Se as estrelas analisadas estão à distância  $r = 3 \cdot 10^6 \text{ al}$ ,  
 i) O valor de  $S$  para o telescópio JWST ( $S_J$ ), vale:

$$\text{tg}\theta = \frac{S}{r} \Rightarrow S = \theta \cdot r$$

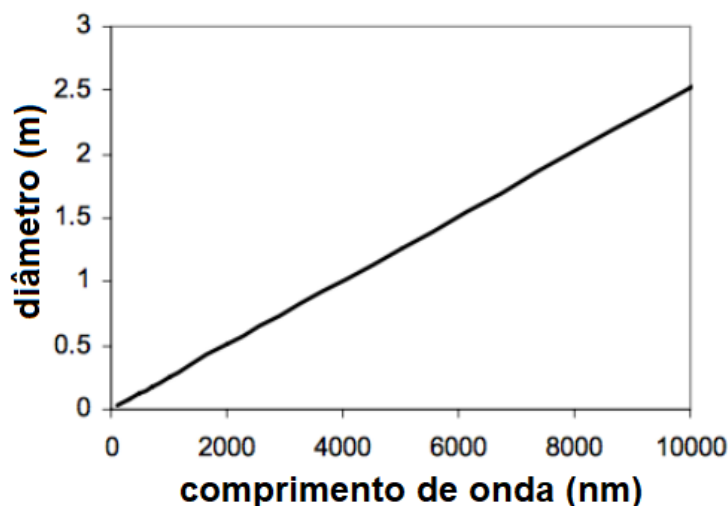
$$S_J = \theta_J \cdot r = 1,03 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^6 \Rightarrow S_J = 0,309 \text{ al}$$

ii) Para o telescópio Hubble, temos:

$$\theta_H = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{D_H} = 1,22 \cdot \frac{550 \cdot 10^{-9}}{2,4} \Rightarrow \theta_H = 2,79 \cdot 10^{-7} \text{ rad}$$

$$S_H = \theta_H \cdot r = 2,79 \cdot 10^{-7} \cdot 3 \cdot 10^6 \Rightarrow S_H = 0,839 \text{ al}$$

c) A partir dos dados apresentados e da equação da resolução angular, temos:



d) Considerando que o corpo humano subtende um ângulo  $\theta = 1''$  e emite energia infravermelha de  $10 \mu\text{m}$ , para se distinguir deve-se ter um telescópio com espelho primário com diâmetro mínimo de  $D = 2,52 \text{ m}$ . Como o telescópio Hubble possui  $D_H < D$ , ele **não** pode distinguir um humano por emissão de calor.

2) a) Considerando o sistema conservativo, para o ponto N, temos:

$$E_T = K + U \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r} \Rightarrow -\frac{Gmm}{2a} = \frac{m}{2} \cdot \frac{GM}{R_T} - \frac{GMm}{R_T} \Rightarrow a = R_T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 6371 \text{ km}$$

b) Sendo o ponto D o centro da elipse de focos  $F_1$  e  $F_2$ , e também o centro do quadrado  $NF_1CF_2$  de lado  $R_T$ , vem:

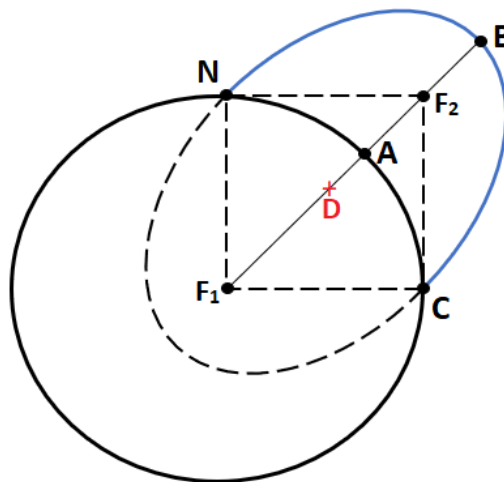
Note:

$$F_1F_2 = R_T \cdot \sqrt{2}$$

$$F_1A = R_T$$

$$DF_2 = \frac{R_T \sqrt{2}}{2}$$

$$DB = a = R_T$$



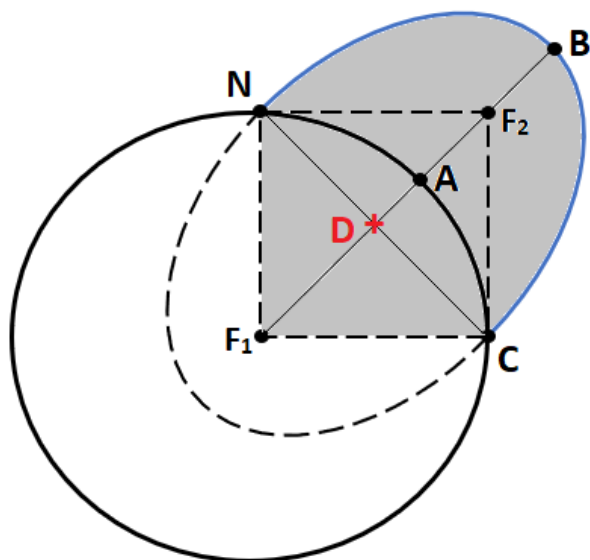
Da geometria do sistema, a distância AD é dada por:

$$F_1A - AD + DF_2 = F_1F_2 \Rightarrow R_T - AD + \frac{R_T \sqrt{2}}{2} = R_T \sqrt{2} \Rightarrow AD = \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T$$

Logo, a distância AB, que equivale a altura máxima  $h$ , será dada por:

$$AD + AB = DB \Rightarrow \frac{(2 - \sqrt{2})}{2} R_T + h = R_T \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{2} R_T = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 6371 \Rightarrow h = 4505 \text{ km}$$

c) Lembrando que a área da elipse é dada por  $S = \pi \cdot a \cdot b$ , onde  $b$  é o semieixo menor; a área  $A$  da figura sombreada é:



$$A = \frac{\pi a \cdot b}{2} + \frac{R_T^2}{2} \Rightarrow A = \frac{\pi \cdot R_T \cdot \frac{R_T \sqrt{2}}{2}}{2} + \frac{R_T^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{(\pi \sqrt{2} + 2)}{4} \cdot R_T^2$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler e considerando a gravidade  $g$  constante durante o voo, temos que o período orbital  $P$  da órbita é:

$$\left| \begin{array}{l} \frac{P^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \\ g = \frac{GM_T}{R_T^2} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{P^2}{R_T^3} = \frac{4\pi^2}{g \cdot R_T^2} \Rightarrow P = 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}}$$

Portanto, da 2ª Lei de Kepler, temos que o tempo de voo será:

$$\begin{aligned} \frac{A_{Total}}{P} &= \frac{A}{t} \Rightarrow \frac{\pi ab}{P} = \frac{A}{t} \Rightarrow t = \frac{AP}{\pi ab} \Rightarrow t = \frac{(\pi\sqrt{2}+2)}{4} \cdot R_T^2 \cdot 2\pi \sqrt{\frac{R_T}{g}} \cdot \frac{2}{\pi \cdot R_T \cdot R_T \sqrt{2}} \Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{R_T}{g}} \Rightarrow \\ &\Rightarrow t = \frac{\pi\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{637110^3}{9,8}} \Rightarrow \boxed{t = 3672 \text{ s} \approx 1,02 \text{ h}} \end{aligned}$$

3) a) O fluxo luminoso da estrela Ciro ( $F_C$ ) a uma distância  $a_1$ , vale:

$$F_C = \frac{L_C}{4\pi \cdot a_1^2} = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot a_1^2} \Rightarrow F_C = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2}$$

Portanto, a potência recebida ( $P_R$ ) pelo planeta Umi de raio  $r$  é:

$$F_C = \frac{P_R}{\pi \cdot r^2} \Rightarrow \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2} = \frac{P_R}{\pi \cdot r^2} \Rightarrow P_R = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2}$$

Considerando o planeta Umi como um corpo negro ideal ( $\varepsilon = 1$ ) em equilíbrio térmico, temos que a potência recebida é igual a potência emitida ( $P_E$ ), logo:

$$\left| \begin{array}{l} P_E = \varepsilon 4\pi r^2 \sigma T_U^4 \\ P_R = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2} \end{array} \right. \Rightarrow \varepsilon 4\pi r^2 \sigma T_U^4 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi \cdot r^2}{a_1^2} \Rightarrow \boxed{T_U = T \cdot \sqrt{\frac{R}{2a_1}}}$$

b) Comparando os dados de um astrônomo em Umi observando a estrela Ciro, com os dados de um astrônomo na Terra observando o Sol, da equação geral das magnitudes, vem:

$$m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F_C}{F_S}\right) \Rightarrow m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot a_1^2} \cdot \frac{4\pi \cdot a_s^2}{4\pi R_s^2 \cdot \sigma \cdot T_s^4}\right) \Rightarrow m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{R^2 a_s^2 T^4}{R_s^2 a_1^2 T_s^4}\right)$$

A partir da equação encontrada no item a, podemos reescrever a equação acima:

$$\left| \begin{array}{l} T^4 = \frac{4 \cdot T_U^4 \cdot a_1^2}{R^2} \\ m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{R^2 a_s^2 T^4}{R_s^2 a_1^2 T_s^4}\right) \end{array} \right. \Rightarrow m_1 - m_s = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4 \cdot a_s^2 T_U^4}{R_s^2 T_s^4}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow (-27) - (26,72) = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{4 \cdot (1,49 \cdot 10^{11})^2 \cdot T_U^4}{(6,95 \cdot 10^8)^2 \cdot (5778)^4}\right) \Rightarrow \boxed{T_U = 354,6 \text{ K}}$$

c) A potência emitida por Eki ( $P'_E$ ) é dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_C = \frac{L_C}{4\pi \cdot a_2^2} = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_2^2} \\ F_C = \frac{P'_R}{\pi r_2^2} \\ P'_E = P'_R \end{array} \right. \Rightarrow \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_2^2} = \frac{P'_E}{\pi r_2^2} \Rightarrow P'_E = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi r_2^2}{a_2^2}$$

Considerando que o diâmetro angular de Eki é  $\theta$ , quando visto a uma distância  $d$  para um observador em Umi, temos que o raio  $r_2$  de Eki pode ser expresso por:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{r_2}{d} \Rightarrow r_2 = d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Portanto, o fluxo luminoso que Umi recebe de Eki é:

$$\left\{ \begin{array}{l} F = \frac{P'_E}{4\pi d^2} \\ P'_E = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi r_2^2}{a_2^2} \\ r_2 = d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array} \right. \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \cdot \pi}{a_2^2 \cdot 4\pi d^2} \cdot \left(d \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 \Rightarrow F = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4a_2^2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

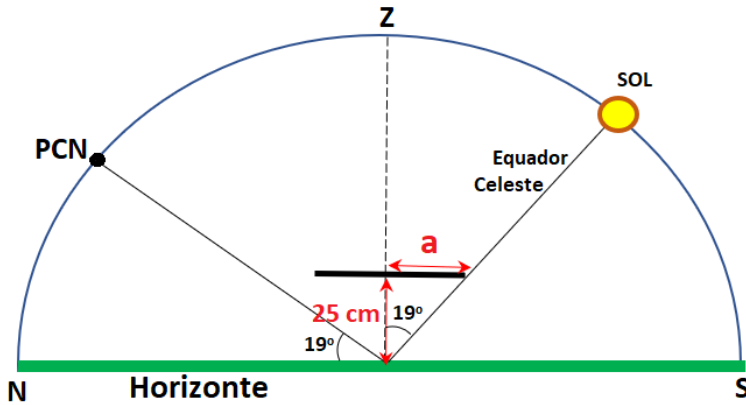
d) Comparando as magnitudes aparentes de Eki e Ciro, para um observador em Umi, da equação geral das magnitudes, temos:

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 &= -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{F}{F_C}\right) \Rightarrow m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{\frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4a_2^2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{a_1^2}}\right) \Rightarrow m_2 - m_1 = -\frac{5}{2} \cdot \log\left(\frac{a_1^2}{4a_2^2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow m_2 - m_1 = -5 \cdot \log\left(\frac{a_1}{2a_2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{m_2 - m_1}{-5}\right)} \end{aligned}$$

e) Da 3ª Lei de Kepler, temos:

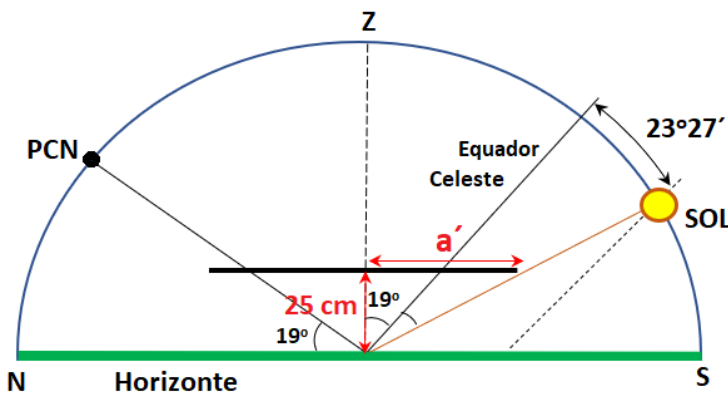
$$\begin{aligned} \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 &= \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{m_2 - m_1}{-5}\right)}\right)^3 \Rightarrow \left(\frac{423}{P_2}\right)^2 = \left(\frac{2}{\operatorname{tg}\left(\frac{20''}{2}\right)} \cdot 10^{\left(\frac{-2,6+27}{-5}\right)}\right)^3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow P_2 = 918,6 \text{ dias terrestres} \end{aligned}$$

4) a) Esquemáticamente, para o Sol ao meio-dia em 21 de março (equinócio) na cidade de Puebla ( $\phi = 19^\circ\text{N}$ ), temos:



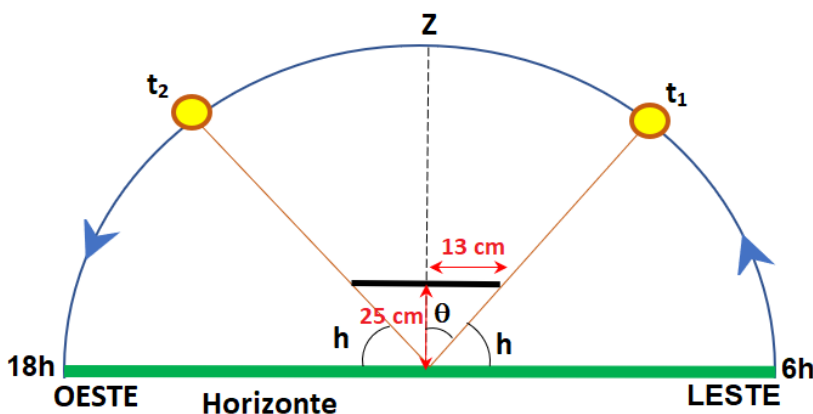
$$\operatorname{tg}19^\circ = \frac{a}{25} \Rightarrow a = 8,61 \text{ cm}$$

b) A situação mais crítica acontecerá quando o Sol possuir a menor altura, ao meio-dia, em relação ao horizonte. Esse evento acontecerá próximo ao dia 21 de dezembro (solstício de inverno para o hemisfério Norte) em que a declinação do Sol é  $-23^\circ27'$ , esquematicamente, temos:



$$\operatorname{tg}(19^\circ + 23^\circ27') = \frac{a'}{25} \Rightarrow a' = 22,87 \text{ cm}$$

c) Como Citlali está no Equador ( $\phi = 0^\circ$ ) em 21 de setembro (equinócio), temos que a altura  $h$  do Sol em que seu chapéu cumpre o propósito de proteger todo o seu rosto é:



$$\begin{cases} h + \theta = 90^\circ \\ \operatorname{tg}\theta = \frac{13}{25} \end{cases} \Rightarrow h = 90^\circ - 27,47^\circ \Rightarrow h = 62,52^\circ$$

Sabendo que no Equador, em 21 de setembro, o Sol nasce próximo às 6h e se põe às 18h, os instantes  $t_1$  e  $t_2$  em que o Sol terá altura  $h$  são respectivamente:

$$t_1 = 6h + 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_1 = 10h10\text{min}4,8\text{s}$$

$$t_2 = 18h - 62,52^\circ \cdot \frac{12h}{180^\circ} \Rightarrow t_2 = 13h49\text{min}55,2\text{s}$$

Portanto, o chapéu cumprirá o seu papel das **10h 10min às 13h 50min**.

d) O intervalo de tempo necessário para que Citlali sofra queimaduras será o tempo  $t$  em que a área do gráfico corresponda ao valor  $200 \text{ J/m}^2$  (lembrando que o chapéu absorve metade da radiação). Analisando o gráfico, temos:

- A área total do gráfico é:

$$A_{total} = \frac{(6+2) \cdot 0,016}{2} \cdot 3600 = 230,4 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre 12h e 14h é:

$$A_1 = 2 \cdot 0,016 \cdot 3600 = 115,2 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre os instantes 14h e  $t$ :

$$A_2 = 200 - 115,2 = 84,8 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- A área correspondente entre os instantes  $t$  e 18h:

$$A_3 = A_{total} - (A_1 + A_2) = 230,4 - (115,2 + 84,8) = 30,4 \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$$

- Da proporção do gráfico, temos que a relação entre  $t$  e  $y$  é tal que:

$$\frac{18-t}{18-14} = \frac{y-0}{0,016-0} \Rightarrow y = 0,004 \cdot (18-t) \quad [1]$$

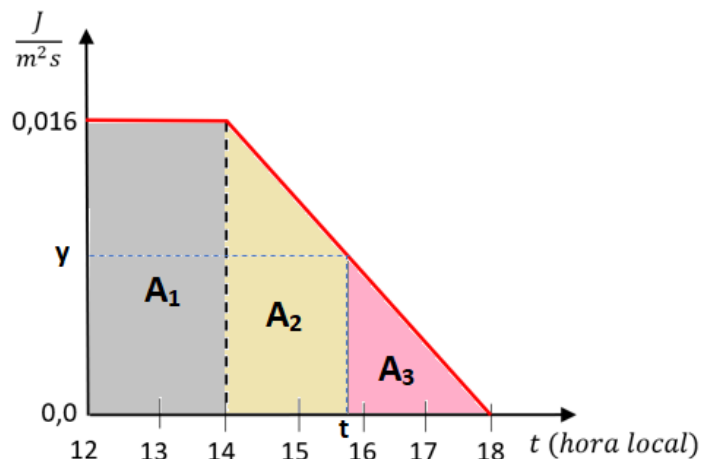
- Entre os instantes  $t$  e 18h, é válido que:

$$A_3 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \Rightarrow 30,4 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \quad [2]$$

- Das equações [1] e [2], vem:

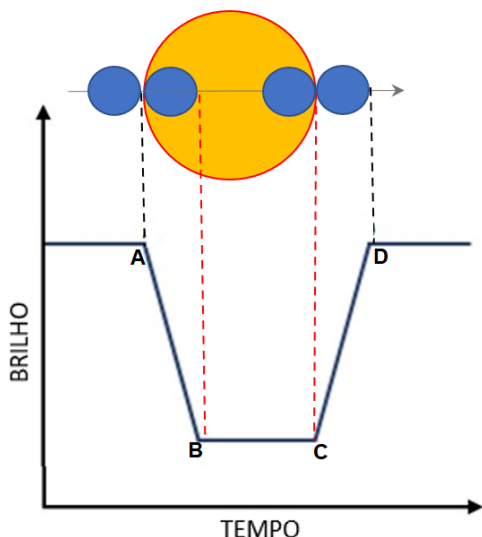
$$\begin{cases} y = 0,004 \cdot (18-t) \\ 30,4 = \frac{(18-t) \cdot y}{2} \cdot 3600 \end{cases} \Rightarrow 30,4 = \frac{y}{0,004} \cdot \frac{y}{2} \cdot 3600 \Rightarrow y = 0,00822 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} \quad \text{e} \quad t = 15,94 \text{h}$$

Portanto, a partir das 16h Citlali sofrerá queimaduras por excesso de exposição solar.



## Prova Teórica em Grupo – Resoluções

1) a) Sendo  $R$  o raio de TRAPPIST-1 e  $r$  o raio de TRAPPIST-1g, considerando que a velocidade tangencial de TRAPPIST-1g é constante e seu plano orbital é paralelo a linha de visada, temos:



$$\begin{cases} d_{AD} = v \cdot t_{AD} \\ d_{BC} = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(R+r) = v \cdot t_{AD} \\ 2(R-r) = v \cdot t_{BC} \end{cases} \Rightarrow R = \frac{v \cdot (t_{AD} + t_{BC})}{4} \text{ e } r = \frac{v \cdot (t_{AD} - t_{BC})}{4}$$

Logo:

$$R = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 + 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow R = 8,14 \cdot 10^7 \text{ m}$$

$$r = \frac{4,15 \cdot 10^4 (1,19 - 0,99) \cdot 3600}{4} \Rightarrow r = 7,47 \cdot 10^6 \text{ m}$$

b) Da equação geral das magnitudes, temos que o fluxo  $F_1$  de TRAPPIST-1 é:

$$m_1 - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow 13,43 - (-26,72) = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{1366}\right) \Rightarrow F_1 = 1,18 \cdot 10^{-13} \frac{W}{m^2}$$

Sabendo que TRAPPIST-1 está a  $d = 12$  pc, da definição de fluxo e da equação de Stefan-Boltzmann, vem:

$$\begin{cases} F_1 = \frac{L}{4\pi d^2} \\ L = 4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 \end{cases} \Rightarrow F_1 = \frac{R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{d^2} \Rightarrow 1,18 \cdot 10^{-13} = \frac{(8,142 \cdot 10^7)^2 \cdot 5,67 \cdot 10^{-8} \cdot T^4}{(12,3086 \cdot 10^{16})^2} \Rightarrow T = 2560K$$

c) Considerando a situação de magnitude  $m_1$  (TRAPPIST-1 não eclipsada por nenhum planeta) e situação de magnitude  $m_2$  (TRAPPIST-1 eclipsada por um planeta de raio  $r$ ); como o sistema está sempre a mesma distância  $d$  da Terra, da equação geral das magnitudes, vem:



Magnitude  $m_1$

$$m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F_1}{F_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{4\pi d^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{L_1}{L_2}\right) \Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4 - 4\pi r^2 \cdot \sigma \cdot T^4}\right) \Rightarrow$$



Magnitude  $m_2$

$$\Rightarrow m_1 - m_2 = -2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right) \Rightarrow m_2 = m_1 + 2,5 \cdot \log\left(\frac{R^2}{R^2 - r^2}\right)$$

d) Utilizando os dados do exoplaneta TRAPPIST-1e, temos que a massa de TRAPPIST-1 é:

$$M_{TRAPPIST-1} = \frac{4\pi^2 \cdot a^3}{G \cdot P^2} = \frac{4\pi^2}{6,67 \cdot 10^{-11}} \cdot \frac{(0,028 \cdot 1,5 \cdot 10^{11})^3}{(6,09 \cdot 24 \cdot 3600)^2} \Rightarrow M_{TRAPPIST-1} = 1,58 \cdot 10^{29} \text{ kg}$$

Aplicando a 3ª Lei de Kepler  $\left(\frac{P_1^2}{a_1^3} = \frac{P_2^2}{a_2^3}\right)$ , vem:

Planeta	Período (dias)	Raio orbital (ua)
1b	1,51	<b>0,011</b>
1c	<b>2,38</b>	0,015
1d	4,04	<b>0,021</b>
1e	6,09	0,028
1f	9,20	<b>0,037</b>
1g	12,35	0,045
1h	<b>18,60</b>	0,059

e) A potência recebida ( $P_R$ ) por um exoplaneta, de TRAPPIST-1 de luminosidade  $L_{estrela}$ , a distância  $d$ , é dada por:

$$\begin{cases} I = \frac{P_R}{\pi R_p^2} \\ I = (1 - a) \cdot I_0 \Rightarrow P_R = I_0 \cdot (1 - a) \cdot \pi R_p^2 \\ I_0 = \frac{L_{estrela}}{4\pi \cdot d^2} \end{cases}$$

Onde  $I$  é a incidência luminosa e  $a$  é chamado o albedo. **Comentário:** Albedo (do latim *abus* “brancura”) é o poder de reflexão de uma superfície. Pode ser obtido pela razão entre a radiação refletida pela radiação incidente.

Já a potência emitida ( $P_E$ ) pelo exoplaneta é expressa por:

$$P_E = \varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4$$

Onde  $\varepsilon$  é a emissividade que para um corpo negro tem valor 1.

No equilíbrio térmico,  $P_R = P_E$ , logo:

$$\varepsilon 4\pi R_p^2 \sigma T_p^4 = I_0 \cdot (1 - a) \cdot \pi R_p^2 \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{L_{estrela}}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1 - a) \Rightarrow 4 \cdot \sigma T_p^4 = \frac{4\pi R^2 \cdot \sigma \cdot T^4}{4\pi \cdot d^2} \cdot (1 - a)$$

$$d = \sqrt{\frac{R^2 \cdot T^4 \cdot (1 - a)}{4 \cdot T_p^4}} = \frac{R \cdot T^2 \cdot \sqrt{1 - a}}{2 \cdot T_p^2} \Rightarrow d = \left(\frac{T}{T_p}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1 - a}}{2}$$

Para encontrar os limites da zona habitável devemos ter um planeta cuja temperatura permita a presença de água no estado líquido, então  $273 \text{ K} \leq T_p \leq 373 \text{ K}$ . Sabendo que a temperatura de TRAPPIST-1 é  $T = 2560 \text{ K}$ , temos:

$$d_{\min} = \left(\frac{T}{T_{p_{\max}}}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1 - a}}{2} = \left(\frac{2560}{373}\right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1 - 0,1}}{2} \Rightarrow d_{\min} = 1,819 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,012 \text{ ua}$$

$$d_{\max} = \left(\frac{T}{T_{p_{\min}}}\right)^2 \cdot \frac{R \cdot \sqrt{1 - a}}{2} = \left(\frac{2560}{273}\right)^2 \cdot \frac{8,142 \cdot 10^7 \cdot \sqrt{1 - 0,1}}{2} \Rightarrow d_{\max} = 3,396 \cdot 10^9 \text{ m} = 0,023 \text{ ua}$$

Portanto, os exoplanetas dentro da zona habitável são TRAPPIST- 1c e TRAPPIST- 1d.

f) Considerando que no primeiro trecho da viagem a micro nave se desloca com aceleração constante (MRUV) e no segundo trecho permanece com velocidade constante (MRU), temos:

- Trecho 1:

$$v = v_0 + a.t_1 \Rightarrow 0,2.c = 35.t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{0,2c}{35} = 1,714.10^6 \text{ s}$$

$$v^2 = v_0^2 + 2.a.d_1 \Rightarrow (0,2.c)^2 = 2.35.d_1 \Rightarrow d_1 = \frac{4.10^{-2}.c^2}{70} = 5,142.10^{13} \text{ m}$$

- Trecho 2:

$$d_2 = v.t_2 \Rightarrow 12.3,086.10^{16} - d_1 = 0,2c.t_2 \Rightarrow t_2 = 6,159.10^9 \text{ s}$$

Logo, o tempo total da viagem é:

$$t = t_1 + t_2 = 1,714.10^6 + 6,159.10^9 \approx 195 \text{ anos}$$

2) a) Analisando a Figura 1, temos que a altura  $h$  do Sol é:

$$\text{tg } h = \frac{23}{22} \Rightarrow h = 46,27^\circ$$

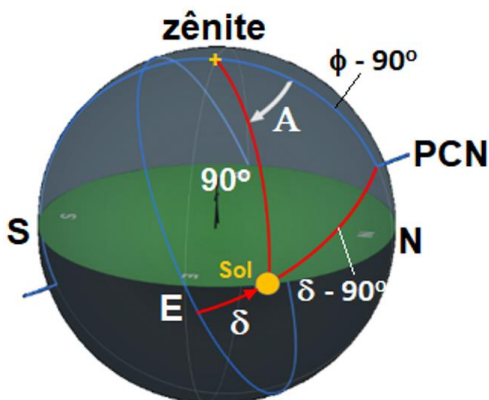
Considerando que a declinação do Sol no dia 21 de dezembro é  $\delta = -23,45^\circ$ , a latitude  $\phi$  de Chichén Itzá é:

$$|\phi| + |\delta| + h = 90^\circ \Rightarrow |\phi| = 90^\circ - 23,45^\circ - 46,27^\circ \Rightarrow |\phi| = 20,73^\circ \text{ N}$$

b) Sabendo que o azimute da escada Oeste é  $A_{EW} = 290^\circ$ , a Figura 2, temos:

$$A_{EW} - 270^\circ = \theta \Rightarrow \theta = 290^\circ - 270^\circ \Rightarrow \theta = 20^\circ$$

c) Se o Sol faz passagem zenital em Tinum no dia 23 de maio, sua declinação, nesta data, é igual a latitude local, ou seja,  $\delta = \phi = 20,73^\circ$ . Para o nascer do Sol, o azimute  $A$  será dado por:



$$\cos(\delta - 90^\circ) = \cos(\phi - 90^\circ) \cos 90^\circ + \text{sen}(\phi - 90^\circ) \text{sen} 90^\circ \cdot \cos A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen} \delta = \cos \phi \cdot \cos A \Rightarrow \cos A = \frac{\text{sen} \delta}{\cos \phi} \Rightarrow \cos A = \frac{\text{sen} \delta}{\cos \phi} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos A = \text{tg } 20,73^\circ \Rightarrow A = 67,76^\circ$$

Já para o pôr do Sol, com azimute  $A'$ , temos:

$$\cos(360^\circ - A') = \text{tg } 20,73^\circ \Rightarrow A' = 292,24^\circ$$

d) A distância máxima e mínima entre o planeta Terra e Vênus é:

$$d_{\text{máx}} = 1 \text{ ua} + 0,72 \text{ ua} = 1,72 \text{ ua} \Rightarrow d_{\text{máx}} = 2,58.10^{11} \text{ m}$$

$$d_{\text{mín}} = 1 \text{ ua} - 0,72 \text{ ua} = 0,28 \text{ ua} \Rightarrow d_{\text{mín}} = 4,20.10^{10} \text{ m}$$

Considerando o diâmetro de Vênus  $2.r = 1,21.10^7$  m, temos:

$$\operatorname{tg}\theta_{\max} = \frac{1,21.10^7 \text{ m}}{4,20.10^{10} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\max} = 1,6.10^{-3^\circ} \Rightarrow \theta_{\max} = 59,42''$$

$$\operatorname{tg}\theta_{\min} = \frac{1,21.10^7 \text{ m}}{2,58.10^{11} \text{ m}} \Rightarrow \theta_{\min} = 2,7.10^{-3^\circ} \Rightarrow \theta_{\min} = 9,67''$$

e) Na culminação superior o ângulo horário tem valor zero ( $H = 0$ ). Portanto, a ascensão reta do aglomerado é:

$$TSL = H + \alpha \Rightarrow \alpha = 3h47 \text{ min}$$

Já o ângulo horário  $H'$  do aglomerado, neste instante, em *Greenwich*, é:

$$\begin{cases} T_{SL} = T_{SG} + \lambda \\ T_{SG} = H' + \alpha \end{cases} \Rightarrow T_{SL} = H' + \alpha + \lambda \Rightarrow 3h47 \text{ min} = H' + 3h47 \text{ min} - 5h54 \text{ min} 42s \Rightarrow$$

$$\lambda = -88^\circ 34' = -5h54 \text{ min} 42s$$

$$\Rightarrow H' = 5h54 \text{ min} 42s$$

Das relações apresentadas no enunciado, temos que 13 winales e 18 kines equivalem a 278 dias. Fixando o horário de observação sabemos que por dia o ângulo horário aumenta cerca de 4 min ( $1^\circ$ ) para Oeste ( $360^\circ/365$  dias). Logo, após 278 dias a variação do ângulo horário ( $\Delta H$ ) será:

$$\Delta H = \frac{360^\circ}{365 \text{ dias}} \cdot 278 \text{ dias} \cdot \frac{1h}{15^\circ} \Rightarrow \Delta H = 18h16 \text{ min} 46s$$

Portanto, o novo ângulo horário ( $H''$ ) das Plêiades em *Greenwich* será:

$$H'' = H' + \Delta H = 5h54 \text{ min} 42s + 18h16 \text{ min} 46s \Rightarrow H'' = 11 \text{ min} 28s$$

f) A declinação das Plêiades pode ser calculada por:

$$\delta - \phi + h = 90^\circ \Rightarrow \delta - 20^\circ 43,8' + 83^\circ 36' = 90^\circ \Rightarrow \delta = 27^\circ 7' 36''$$

Para um astro ser circumpolar visível é necessário que  $\delta + \phi > 90^\circ$ . Como  $\delta + \phi > 47^\circ 51' 24''$ , temos que as Plêiades **não** são circumpolares visíveis em Tulum.

g) Segundo as correspondências dadas, um baktun corresponde a  $20 \times 20 \times 18 \times 20 = 144\ 000$  kines. De forma que o maior período Maia é composto por  $13 \times 144\ 000$  kines =  $1\ 872\ 000$  kines. Como 1 kin = 1 dia, o maior período Maia possui 5128 anos e 280 dias.

Portanto, a data de início do último maior período Maia é próxima ao dia **16 de março de 3116 a.C.** .

3) a) Densidade numérica  $n$ , corresponde ao número de objetos  $N$  especificados por unidade de volume  $V$ , logo:

$$n = \frac{N}{V} \Rightarrow N = n.V$$

- Para  $r < R_b$ , a massa do sistema  $M(r)$  varia com a distância  $r$ , de tal forma que:

$$\begin{cases} M(r) = N.m \\ N = n \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \end{cases} \Rightarrow M(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot r^3$$

Considerando que as estrelas de massa  $m$  estão em órbitas circulares no interior do bojo galáctico, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_G(r) = R_{CP} \\ F_G(r) = \frac{GM(r).m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM(r).m}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot r^3 \cdot m = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = r \sqrt{\frac{4\pi Gnm}{3}} \\ R_{CP} = \frac{mv^2}{r} \end{array} \right.$$

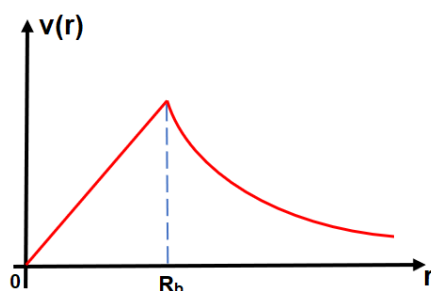
- Para  $r \geq R_b$ , a massa total  $M_T$  do sistema se mantém constante, uma vez que se deve desprezar as estrelas do halo, então:

$$\left\{ \begin{array}{l} M_T = N \cdot m \\ N = n \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R_b^3 \Rightarrow M_T = \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot R_b^3 \end{array} \right.$$

Considerando que as estrelas de massa  $m$  estão em órbitas circulares no interior do bojo galáctico, vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_G = R_{CP} \\ F_G = \frac{GM_T \cdot m}{r^2} \Rightarrow \frac{GM_T \cdot m}{r^2} = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow \frac{G}{r^2} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot n \cdot m \cdot R_b^3 \cdot m = \frac{mv'^2}{r} \Rightarrow v' = \sqrt{\frac{4\pi GnmR_b^3}{3r}} \\ R_{CP} = \frac{mv'^2}{r} \end{array} \right.$$

b) Sabendo que  $G$ ,  $n$ ,  $m$  e  $R_b$ , são constantes, para  $r < R_b$  temos  $v \propto r$ ; e para  $r \geq R_b$  vale  $v' \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ , logo:



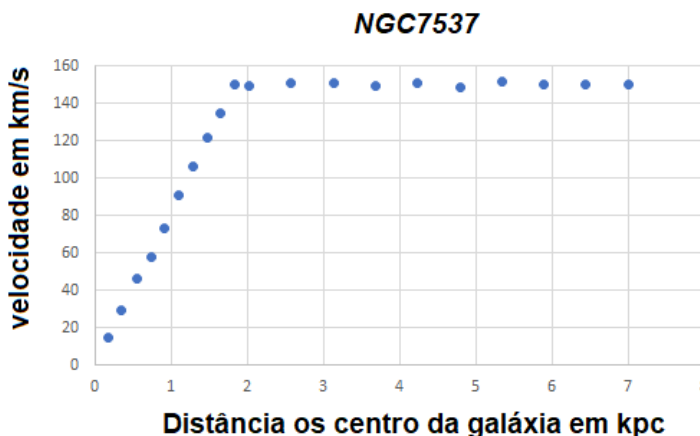
c) Seja  $N$  o número de estrelas da galáxia NGC7537, então como as estrelas são semelhantes ao Sol, a luminosidade da galáxia será  $N \cdot L_{Sol}$ . Da equação fundamental das magnitudes, vem:

$$m - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{F}{F_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \cdot \log\left(\frac{N \cdot L_{Sol}}{4\pi D^2} \cdot \frac{4\pi d^2}{L_{Sol}}\right) \Rightarrow m - m_{Sol} = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{d}{D}\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15,7 - (-26,72) = -2,5 \log\left(N \cdot \left(\frac{1,5 \cdot 10^{11}}{38 \cdot 10^6 \cdot 3,086 \cdot 10^{16}}\right)^2\right) \Rightarrow N = 6,5 \cdot 10^8 \text{ estrelas}$$

d) A distância  $x$  das estrelas em relação ao centro da galáxia NGC7537 é dada por:  $x = 38.10^6.tg(\theta/2)$ , onde  $\theta$  é o diâmetro angular de suas órbitas. Com os dados da Tabela 1, vem:

Diâmetro angular (")	$v$ (km/s)	Distância (kpc)
2	14,32	0,184
4	29,48	0,349
6	46,06	0,553
8	58,04	0,737
10	73,5	0,921
12	91,1	1,105
14	106,76	1,289
16	121,48	1,474
18	134,86	1,658
20	150,14	1,842
22	149,72	2,026
28	150,72	2,579
34	151,14	3,132
40	149,2	3,684
46	151,22	4,237
52	148,62	4,790
58	151,68	5,343
64	150,28	5,895
70	150,28	6,448
76	150,62	7,000



e) Analisando o gráfico temos que a velocidade das estrelas aumenta linearmente com a distância ao centro da galáxia até uma distância  $R_b$ , e a partir deste ponto se mantém constante, logo:

- Para  $r < R_b$ :

$$v = 82,3.r$$

- Para  $r \geq R_b$ :

$$v' = 150,1 \text{ km/s}$$

f) Do gráfico do item (d), temos que o raio do bojo é da ordem de  $R_b \approx 1,842$  kpc. Considerando que as estrelas de massa  $m$  estão em órbitas circulares no interior do bojo, pode-se estimar a massa do bojo de NGC7537 é:

$$\begin{aligned}
 F_G &= R_{CP} \\
 F_G &= \frac{GM'_T.m}{R_b^2} \Rightarrow \frac{GM'_T.m}{R_b^2} = \frac{mv'^2}{R_b} \Rightarrow M'_T = \frac{v'^2.R_b}{G} = \frac{(150,07.10^3)^2.(1,842.10^3.3,086.10^{16})}{6,67.10^{-11}} \Rightarrow \\
 R_{CP} &= \frac{mv'^2}{R_b} \\
 \Rightarrow M'_T &= 1,919.10^{40} \text{ kg} \Rightarrow M'_T = 9,65.10^9 M_{Sol}
 \end{aligned}$$

g) Para  $r > R_b$ , temos que a quantidade de matéria em função da distância é dada por:

$$v(r) = \sqrt{\frac{G.M(r)}{r}} \Rightarrow M(r) = \frac{r.v(r)^2}{G}$$

Do perfil de densidade esférica da matéria escura, a quantidade de matéria em função da distância deve ser comportar como:

$$M(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho(r) = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Logo, para  $r > R_b$ , a velocidade em função da distância pode ser escrita como:

$$\frac{r \cdot v(r)^2}{G} = \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \rho_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^\alpha$$

Se desejamos obtermos um gráfico como no item **(d)**, em que a velocidade independente da distância, a partir de uma análise dimensional da equação anterior, temos que o expoente  $\alpha$  deve valer:

$$1 = 3 + \alpha \Rightarrow \alpha = -2$$

h) Se  $a \ll a_0 \Rightarrow \frac{a}{a_0} \ll 1$  ; logo  $\mu = \frac{a}{a_0}$ . Rescrevendo a 2ª Lei de Newton, temos que a velocidade de rotação das estrelas no halo galáctico é dada por:

$$\left. \begin{array}{l} F = m \cdot a \cdot \frac{a}{a_0} \\ a = \frac{v^2}{r} \\ F_G = \frac{GM_T \cdot m}{r^2} \\ F = F_G \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{GM_T \cdot m}{r^2} = \frac{m}{a_0} \cdot \left( \frac{v^2}{r} \right)^2 \Rightarrow v = \sqrt[4]{GM_T a_0}$$

Como  $G$ ,  $M_T$  e  $a_0$  são constantes, a velocidade de rotação das estrelas no halo galáctico também será constante.

## Referências

### Sites:

- V OLAA – Bolívia: <http://volaa.fcyt.umss.edu.bo/>
- VI OLAA – Uruguai: <http://6olaa.blogspot.com/>
- VII OLAA – Brasil: [http://www.mast.br/pt-br/hotsite\\_olimpiada/index.html](http://www.mast.br/pt-br/hotsite_olimpiada/index.html)
- VIII OLAA – Argentina: <http://fcaglp.unlp.edu.ar/~extension/OLAA/>
- IX OLAA – Chile: <http://www.sochias.cl/olaa2017/>
- X OLAA – Paraguai: <https://www.aep.gov.py/olimpiada-paraguaya-de-astronomia-y-astronautica>
- XI OLAA – México: [http://astro.inaoep.mx/olimpiada\\_astronomia/](http://astro.inaoep.mx/olimpiada_astronomia/)

### Os originais das provas da OLAA podem ser encontrados nos seguintes endereços:

- Olimpíada Argentina de Astronomia: <https://oaa.oac.unc.edu.ar/>
- Olimpíada Brasileira de Astronomia e Astronáutica: <http://www.oba.org.br/site/>
- Olimpíada Colombiana de Astronomia: <http://oc.uan.edu.co/olimpiada-colombiana-de-astronomia>
- Olimpíada Uruguia de Astronomia: <http://olimp-astro.blogspot.com/p/apoyo.html>

## Temário

A Olimpíada Latino-americana de Astronomia e Astronáutica – OLAA – é um evento acadêmico e científico em torno da Astronomia e ciências afins, em que se reúnem aproximadamente 10 países latino-americanos, para compartilhar conhecimentos, gerar vínculos de comunicação e colaboração, conhecer e trocar experiências educativas de prática docente e promover o desenvolvimento de habilidades científicas em Física, Matemática, Biologia, Química, Astronomia e Astronáutica.

De modo geral, as provas da Olimpíada buscam desenvolver nos estudantes, entre outras, as seguintes habilidades:

- Visão espacial.
- Habilidade com a leitura e manipulação de dados, tabelas e gráficos.
- Habilidade para entender e manejar as linguagens simbólicas da Física e Matemática.
- Capacidade de reflexão global sobre temas da atualidade.
- Compreensão e raciocínio conceitual.
- Criatividade e capacidade de realizar cálculos estimativos e estimar valores.
- Familiaridade com a observação do céu noturno.
- Aplicação de conhecimentos básicos de Física e Matemática correspondente às séries básicas da educação nos países membros.
- Trabalho em equipe.

Nas provas poderão ser usados equipamentos e programas de computador desde que todas as equipes participantes sejam avisadas com pelo menos dois meses de antecedência. Neste caso a organização deverá verificar e zelar pela igualdade de condições de todos os participantes.

## Conteúdo Teórico

### 1. Conhecimentos Básicos sobre a Terra, Lua e Sol.

- Orientação diurna e noturna. Pontos cardeais, bússola. Coordenadas geográficas, fusos horários.
- Consequências dos movimentos terrestres, movimento geral aparente diário, estações do ano, precessão dos equinócios.
- Clima terrestre, causas e repercussões.
- Fenômenos ligados ao sistema Sol-Terra, fase da Lua, eclipses e marés.

### 2. Astronomia Fundamental.

- Esfera Celeste. Sistemas de coordenadas locais e universais. Noções de trigonometria esférica.
- Movimento dos planetas na esfera celeste. Posições relativas entre planetas e entre planetas e o Sol. Períodos Sinódicos.
- Efeitos atmosféricos. Variações de curto e longo período nas posições estelares devido aos movimentos terrestres e movimentos próprios das estrelas.
- Medias astronômicas de passagem do tempo. Diferentes definições astronômicas de dia, mês e ano. Definições e medidas de tempo sidereal, civil e legal. Calendário.

### 3. Mecânica Celeste.

- Conhecimentos básicos de Mecânica. Leis de Newton. Conceito de energia e energia mecânica. Gravitação universal.
- Dinâmica orbital e Leis de Kepler. Parâmetros orbitais e suas variações ao longo do tempo. Dinâmica dos corpos do Sistema Solar. Dinâmica de outros sistemas estelares e planetários.
- Física das marés. Ressonâncias.
- Noções de Astronáutica: lançamento, manutenção e manobras orbitais.
- Gravitação em grande escala. Dinâmica galáctica.

### 4. Astrofísica.

- Concepções e ideias básicas sobre a luz. Espectro eletromagnético: Conceitos básicos de Química e composição dos diferentes astros.
- Astrofísica solar: Estrutura, composição e processos do interior do Sol. Fenômenos observáveis. Vento solar.
- Astrofísica estelar: Composição e propriedades das diferentes estrelas. Modelos de evolução estelar desde o nascimento até os resíduos estelares. Evolução química dos aglomerados estelares (aglomerados abertos) e galácticos (aglomerados globulares). Medições e estudo dos sistemas binários, estrelas variáveis e aglomerados estelares.

- Astrofísica do Sistema Solar: Composição dos planetas e corpos menores. Teorias sobre a evolução e origem do Sistema Solar.

#### 5. Cosmologia.

- Concepções básicas sobre o Universo.
- Cosmologia como disciplina científica. Ideias básicas, suporte experimental.
- Visão atual do Universo. Matéria e energia escura.

#### 6. Medidas e Instrumentos.

- Fotometria. Luminosidade, sistemas de magnitudes. Índices de cor.
- Espectrometria. Física de Corpo Negro. Diagrama HR.
- Medidas astronômicas de distância.
- Análise dimensional. Sistemas de unidades importantes e principais unidades utilizadas em Astronomia.
- Noções de propagação de erros e tratamento de dados em geral.
- Características técnicas, montagens e funcionamento de telescópios.
- Teorias de reflexão, refração e difração da luz.
- Tecnologias gerais associadas à observação do céu e à exploração espacial.

#### 7. História e Epistemologia.

- História da Astronomia e da ciência. História das ideias sobre o Universo.
- Conceitos básicos da filosofia das ciências. Os problemas teóricos e Paradoxos.

#### 8. Outros Temas.

- Introdução à Astronomia. Fundamentos Físicos. Coordenadas Celestes.
- Sistema Sol-Terra-Lua.
- O Tempo em Astronomia.
- Geologia planetária.
- Planetas terrestres: brilhos e magnitudes.
- Planetas jovianos: cores e tipos espectrais.
- Corpos menores. Planetas anões e satélites.
- Meio interestelar.
- Espectrometria.
- Deslocamento do Sol, da Lua e dos planetas pela eclíptica.
- Propriedades e evolução das estrelas. Remanescentes estelares.
- Cosmologia. Galáxias e macroestruturas.
- Instrumentos de medições em Astronomia. Telescópios modernos.
- Exploração espacial: Lua e planetas.