PROVA PRESENCIAL – TEÓRICA P2

SELEÇÃO DAS EQUIPES BRASILEIRAS PARA

XII IOAA e X OLAA de 2018

Nota Final________

Escreva aqui a sua identificação:

Instruções

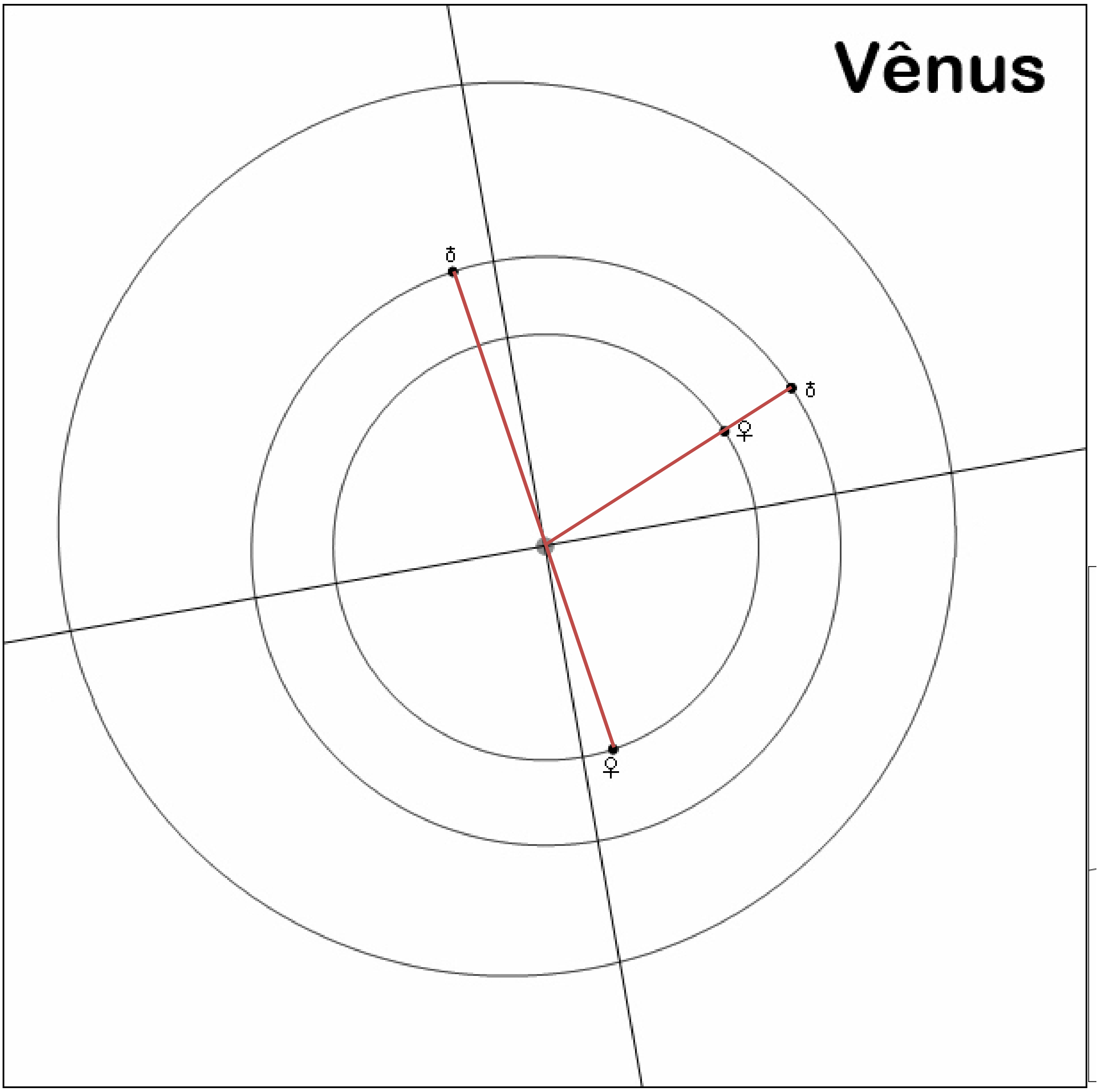
1. Escreva a sua identificação em **TODAS** as folhas de respostas;
2. Escreva o Número de cada Questão na folha de resposta
3. A duração da prova é de 4 (quatro) horas;
4. Essa prova vale 10 pontos e tem peso 4 para a média final;
5. A prova é individual e sem consultas;
6. O uso de calculadoras é permitido, desde que não sejam programáveis/gráficas;
7. Não é permitido o uso de celulares ou similares, nem calculadoras de celulares;
8. Uma tabela de constantes com informações relevantes para a Prova Teórica está disponibilizada;
9. Todo o desenvolvimento, cálculos e respostas das questões devem ser feitos nas folhas de respostas;
10. Folhas de rascunho serão disponibilizadas e não precisam ser entregues junto com a prova e as folhas de respostas;
11. Os cálculos na solução de cada questão são obrigatórios! Eles podem ser feitos a lápis, mas a resposta final deverá ser a caneta. Faça um retângulo ao redor da resposta de cada item. Às respostas ainda que corretas, mas sem o desenvolvimento, serão associadas à nota zero.
12. Ao final da prova devolva o caderno de questões e as folhas de respostas.

Questão	Nota	Questão	Nota
1		6	
2		7	
3		8	
4			
5			
TOTAL			

Questão 1

a) 58127 - 58118 = 9 dias → A Terra percorreu ~ 9º. O símbolo da Terra deve ser colocado próximo, à esquerda da linha e de Vênus, por estar em Conjunção Superior, deve ficar diametralmente oposto à Terra.

d) 58417 - 58118 = 299 dias → A Terra percorreu ~295º.O símbolo da Terra deve ser colocado um pouco depois da linha dos 270º e de Vênus, por estar em Conjunção Inferior, deve ficar sobre a linha que liga a Terra ao centro.



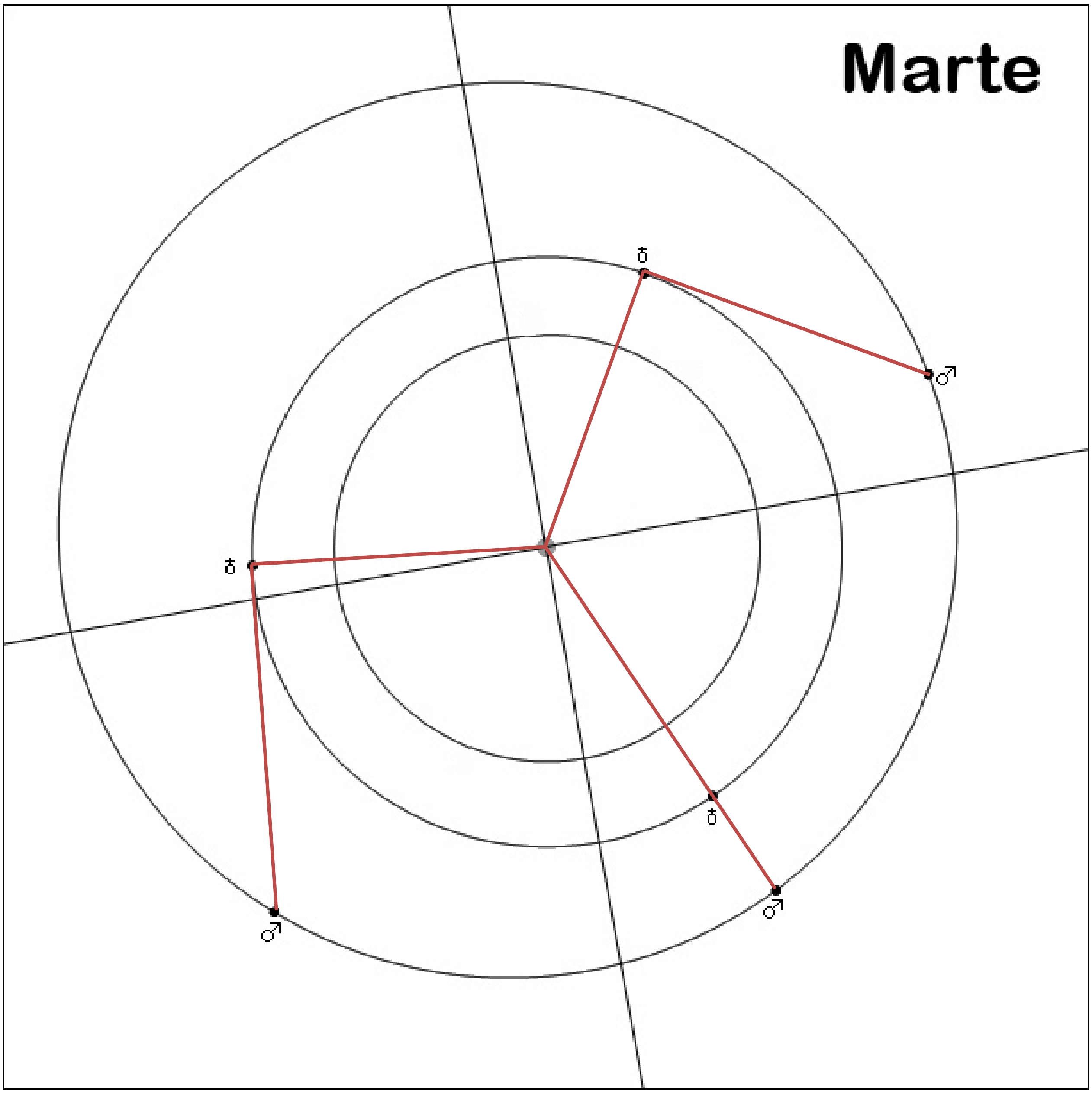
Esquema planetário para os itens a) e d)

Questão 1

b) 58201 - 58118 = 83 dias → A Terra percorreu ~82º.O símbolo da Terra deve ser colocado um pouco antes da linha dos 90º e de Marte, por estar em Quadratura, deve ficar a 90º da linha que liga a Terra ao centro.

c) 58326 - 58118 = 208 dias → A Terra percorreu ~205º.O símbolo da Terra deve ser colocado depois da linha dos 180º e de Marte, por estar em Oposição, deve ficar sobre a linha que liga a Terra ao centro.

e) 58454 - 58118 = 336 dias → A Terra percorreu ~331º.O símbolo da Terra deve ser colocado antes da linha dos 360º e de Marte, por estar em Quadratura, deve ficar a 90º da linha que liga a Terra ao centro.



Esquema planetário para os itens b), c) e e)

Questão 2	a) tamanho angular	167,6”
	b) quantidade total de matéria	$2{,}57\times10^{30}$ kg
	c) velocidade de expansão	$8{,}82\times10^{6}$ m/s
	d) idade do SNR	$5{,}78 \times 10^9 s \cong 183\ anos \approx 200\ anos$
	e) velocidade média	$9{,}0 \times 10^5\ m/s \approx 10^6\ m/s = 10^3\ km/s$

Espaço para o cálculo

Suponha que o SNR seja uma esfera com o raio R. Usando uma régua, traçamos duas retas ligando as marcas quadradas, fora do círculo. Assim, podemos determinar o centro do círculo e medir seu diâmetro. Com a régua, medimos também o comprimento da escala (por exemplo, em mm) na figura. A partir dessas medições, obtemos o raio do círculo r = 57,0mm. 100"(comprimento da escala) correspondem a l = 34,0mm. Com esses dados podemos calcular o raio angular do SNR:

a)

$$\theta = \frac{100'' \times r}{l} = \frac{100'' \times 57\ mm}{34{,}0\ mm} \cong 167{,}6''$$

b) O raio R do SNR, medido em U.A., será a distância d,em pc, vezes seu raio angular θ, em segundos de arco. Então:

$$R = d \times \theta \rightarrow R = 167{,}6'' \times 3400\ pc = 569840\ U.A. \approx 8{,}5 \times 10^{16} m$$

A massa do SNR está confinada dentro de uma esfera de raio R:

$$M = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = 10^{-21} \times \frac{4}{3}\pi(8{,}5 \times 10^{16})^3 \cong 2{,}57 \times 10^{30} kg$$

c) A velocidade de expansão do SNR pode ser calculada a partir da expressão da energia cinética do SNR:

$$E_c = \frac{1}{2}Mv^2 \rightarrow v = \sqrt{\frac{2E_c}{M}} = \sqrt{\frac{2 \times 0{,}01 \times 10^{46}}{2{,}57 \times 10^{30}}} \cong 8{,}82 \times 10^6\ m/s$$

d) A maior parte da matéria está distribuída a 0,60R. Supondo uma velocidade de expansão constante, podemos chegar à idade do SNR:

$$t = \frac{0{,}60R}{v} = \frac{0{,}60 \times 8{,}5 \times 10^{16} m}{8{,}82 \times 10^6\ m/s} \cong 5{,}78 \times 10^9 s \cong 183\ anos \approx 200\ anos$$

e) Usando a régua, medimos a distância da estrela de nêutrons até o centro da circunferência (d = 3,5 mm)

A distância angular θ da estrela de nêutrons até o centro do SNR será:

$$\theta = \frac{100'' \times d}{l} = \frac{100'' \times 3{,}5\ mm}{34{,}0\ mm} \cong 10{,}3''$$

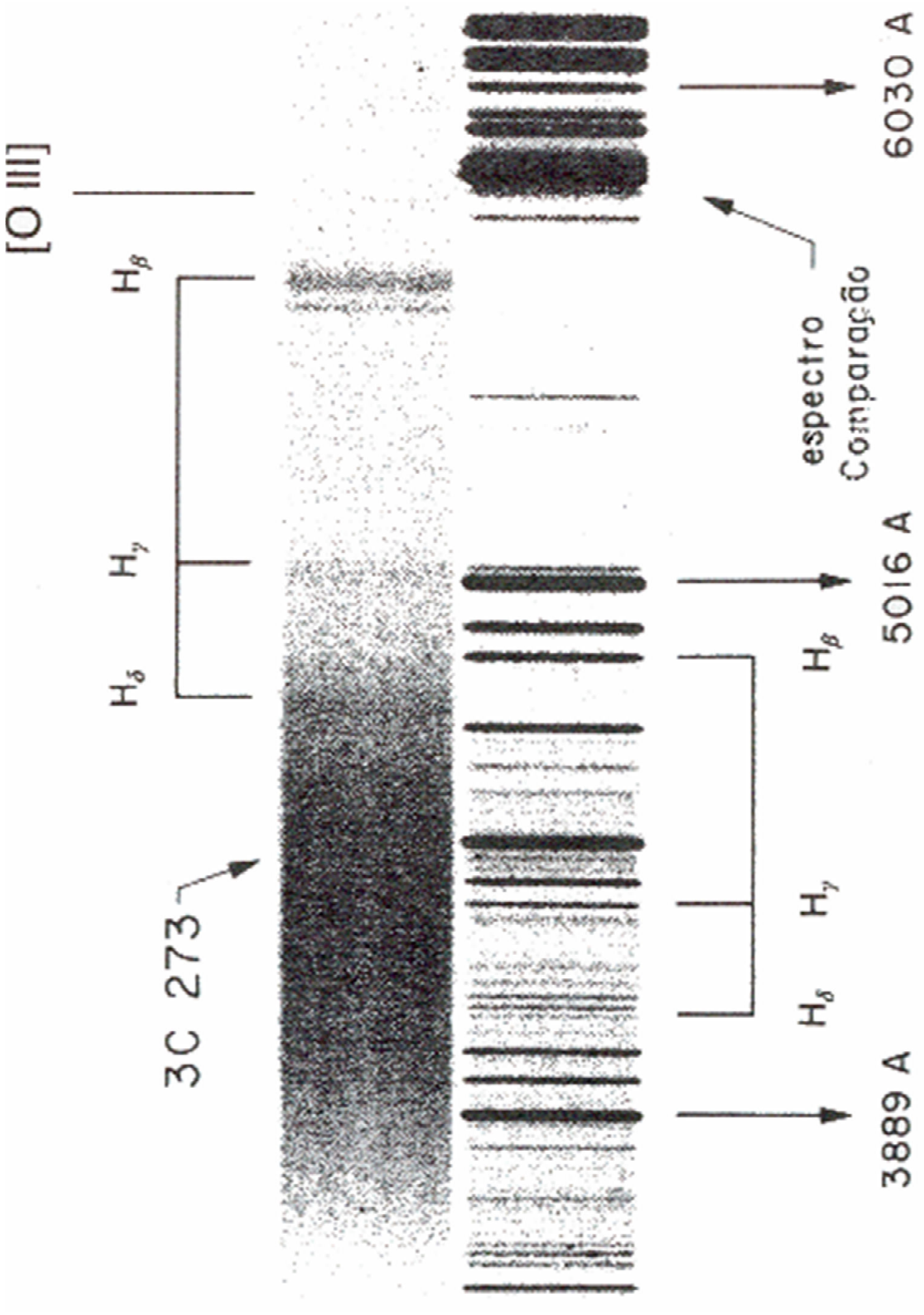
Sua distância linear será:

$$S_N = 10{,}3'' \times 3400\ pc = 35020\ U.A. \approx 5{,}2 \times 10^{15}\ m$$

A velocidade da estrela de nêutrons será:

$$v_N = \frac{S_N}{t} = \frac{5{,}2 \times 10^{15}\ m}{5{,}78 \times 10^9\ s} \cong 9{,}0 \times 10^5\ m/s \approx 10^6\ m/s = 10^3\ km/s$$

Questão 3



[O III]
H_β
H_γ
H_δ
3C 273
6030 A
espectro Comparação
5016 A
H_β
H_γ
H_δ
3889 A

Questão 3	a.1) λ observado	Hδ 4095,3Å	Hγ 4333,5Å	Hβ 4857,3Å
	a.2) λ laboratório	Hδ 4770,0Å	Hγ 5047,7Å	Hβ 5643,0Å
	b) *redeshift* (z)	0,16		
	c) velocidade de recessão (v)	$4{,}42 \times 10^7\ m/s = 4{,}42 \times 10^4\ km/s$		
	d) λ [O III]	5022,0Å		
	e) distância	$631{,}4\ Mpc$		

Questão 3 - espaço para o cálculo

a) Com o auxílio de uma régua, medimos a distância entre as linhas de referência no espectro de comparação para obtermos a escala da figura:

$5016Å - 3889Å = 1127Å \rightarrow 71{,}0\ mm$

Estas duas linhas precisam ser transpostas para a parte de cima da figura. Depois, medimos as distâncias da linha de referência 3889Å até as linhas Hδ, Hγ e Hβ de ambos os espectros.

Espectro de comparação:

$$H\delta - 3889Å = 13{,}0\ mm \rightarrow \lambda_{H\delta} = 3889Å + \frac{13{,}0\ mm \times 1127Å}{71{,}0\ mm} \cong 4095{,}3Å$$

$$H\gamma - 3889Å = 28{,}0\ mm \rightarrow \lambda_{H\gamma} = 3889Å + \frac{28{,}0\ mm \times 1127Å}{71{,}0\ mm} \cong 4333{,}5Å$$

$$H\beta - 3889Å = 61{,}0\ mm \rightarrow \lambda_{H\beta} = 3889Å + \frac{61{,}0\ mm \times 1127Å}{71{,}0\ mm} \cong 4857{,}3Å$$

Espectro observado:

$$H\delta - 3889Å = 55{,}5\ mm \rightarrow \lambda_{H\delta} = 3889Å + \frac{55{,}5\ mm \times 1127Å}{71{,}0\ mm} \cong 4770{,}0Å$$

$$H\gamma - 3889Å = 73{,}0\ mm \rightarrow \lambda_{H\gamma} = 3889Å + \frac{73{,}0\ mm \times 1127Å}{71{,}0\ mm} \cong 5047{,}7Å$$

$$H\beta - 3889Å = 110{,}5\ mm \rightarrow \lambda_{H\beta} = 3889Å + \frac{110{,}5\ mm \times 1127Å}{71{,}0\ mm} \cong 5643{,}0Å$$

b) $1 + z = \frac{\lambda_{observado}}{\lambda_{repouso}}$

Então: $z = \frac{4770{,}0\ Å}{4095{,}3\ Å} - 1 \rightarrow z \cong 0{,}16$

c) $(1+z)^2 = \frac{c+v}{c-v} \rightarrow v = \frac{[(1+z)^2-1]}{[(1+z)^2+1]}c$

Então: $v = \frac{(1{,}16)^2-1}{(1{,}16)^2+1} \times (3{,}00 \times 10^8\ m/s) \rightarrow v \cong 4{,}42 \times 10^7\ m/s = 4{,}42 \times 10^4\ km/s$

d) $[O\ III] - 3889Å = 122{,}0\ mm \rightarrow \lambda_{[O\ III]} = 3889Å + \frac{122{,}0\ mm \times 1127Å}{71{,}0\ mm} \cong 5825{,}5Å$

$$\lambda_{repouso}^{[O\ III]} = \frac{5825{,}5Å}{1 + 0{,}16} \cong 5022{,}0Å$$

e) $v = H_0 d \leftrightarrow d = \frac{v}{H_0} = \frac{4{,}42 \times 10^4}{70} \cong 631{,}4\ Mpc$

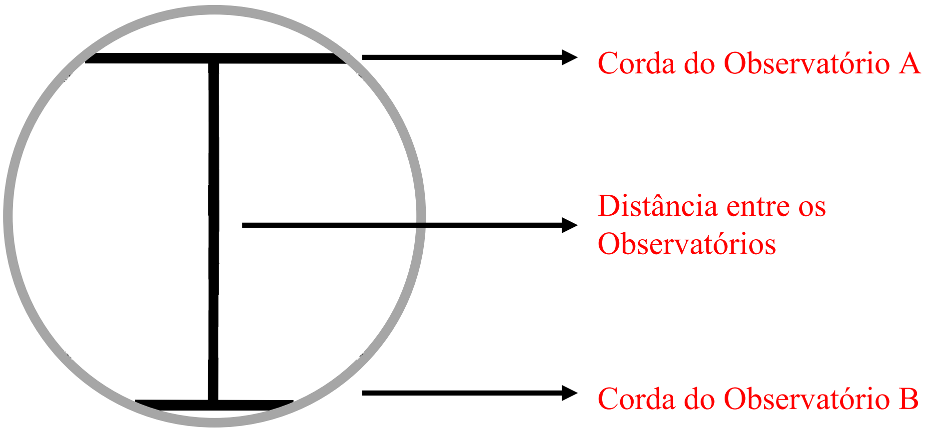
Questão 4	raio do objeto	500 km

Questão 4 - espaço para o cálculo

Como a velocidade do objeto e as durações do evento observadas, pode-se determinar o tamanho da corda medida por cada observatório.

Sabendo a distância entre os observatórios, reconstruímos a geometria da observação.

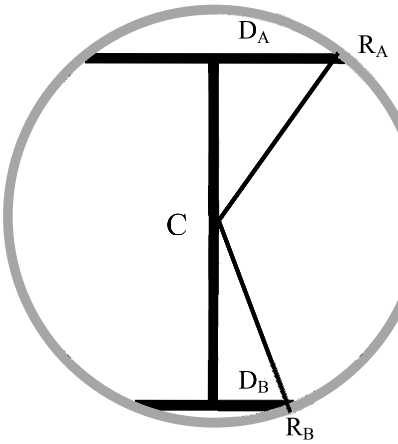
Supondo o objeto esférico:



Sabe-se que o objeto se deslocava no céu a uma velocidade de 20 km/s.

- Corda do observatório A: $C_A = 50\times15 = 750$ km
- Corda do observatório B: $C_B = 20\times15 = 300$ km

Sabe-se também que a distância entre os observatórios: 808 km



Nos triângulos temos os seguintes segmentos:

$D_AR_A = C_A/2 = S_A = 375$ km

$D_BR_B = C_B/2 = S_B = 150$ km

$CR_A = CR_B = R$ (o raio do corpo)

$D_AD_B = CD_A + CD_B = D_T = 808$ km

CD_A e CD_B são desconhecidos.

Do teorema de Pitágoras temos:

$$\boxed{R^2 = \left(\frac{C_A}{2}\right)^2 + CD_A^{\ 2} = S_A^{\ 2} + CD_A^{\ 2}}$$

e

$$\boxed{R^2 = \left(\frac{C_B}{2}\right)^2 + CD_B^{\ 2} = S_B^{\ 2} + CD_B^{\ 2}}$$

Portanto: $S_A^2 + CD_A^2 = S_B^2 + CD_B^2$

Então: $CD_A^2 - CD_B^2 = S_B^2 - S_A^2 = (150)^2 - (375)^2 = -118125$

Ainda temos que: $D_T = CD_A + CD_B = 808$

ou seja: $CD_A = 808 - CD_B$

Relacionando as equações obtidas: $CD_A^2 - CD_B^2 = (808 - CD_B)^2 - CD_B^2$

$$808^2 - 2 \cdot CD_B \cdot 808 + CD_B^2 - CD_B^2 = -118125$$

Portanto: $CD_B \cong 477\ km$

Retornando ao teorema de Pitágoras, temos:

$$R^2 = \left(\frac{C_B}{2}\right)^2 + CD_B^2 = (150)^2 + (477)^2$$

Então o raio do corpo é: R = 500 km

Questão 5	a)	Fonte A (amplitude)	10^{-22}
		Fonte B (amplitude)	10^{-19}
		Fonte C (amplitude)	10^{-21}
	b)	Fonte A (frequência)	10^{1}
		Fonte B (frequência)	10^{0}
		Fonte C (frequência)	10^{-1}
	d)	LISA (fontes observáveis)	Fonte C
		LIGO (fontes observáveis)	Fonte A

Questão 5 - espaço para o cálculo

a)

Para a Fonte A: $M_A = 1{,}7 \times 1{,}99 \times 10^{30} + 2{,}0 \times 1{,}99 \times 10^{30} \cong 7{,}36 \times 10^{30} kg$

$$\mu_A = \frac{1{,}7 \times 1{,}99 \times 10^{30} \times 2{,}0 \times 1{,}99 \times 10^{30}}{7{,}36 \times 10^{30} kg} \cong 1{,}83 \times 10^{30} kg$$

$$h_A = \frac{(6{,}67\times10^{-11})^2}{(3\times10^8)^4} \frac{(1{,}83\times10^{30})}{(15\times10^6 \times 3{,}1\times10^{16})} \frac{(7{,}36\times10^{30})}{(2{,}5\times10^5)} \rightarrow h_A \cong 6{,}36 \times 10^{-23} \approx 10^{-22}$$

Para a Fonte B: $M_B = 10^3 \times 1{,}99 \times 10^{30} + 10^3 \times 1{,}99 \times 10^{30} \cong 3{,}98 \times 10^{33} kg$

$$\mu_B = \frac{10^3 \times 1{,}99 \times 10^{30} \times 10^3 \times 1{,}99 \times 10^{30}}{3{,}98 \times 10^{33}} \cong 9{,}95 \times 10^{32} kg$$

$$h_B = \frac{(6{,}67\times10^{-11})^2}{(3\times10^8)^4} \frac{(9{,}95\times10^{32})}{(15\times10^6 \times 3{,}1\times10^{16})} \frac{(3{,}98\times10^{33})}{(1{,}6\times10^7)} \rightarrow h_B \cong 2{,}92 \times 10^{-19} \approx 10^{-19}$$

Para a Fonte C: $M_C = 1{,}2 \times 1{,}99 \times 10^{30} + 1{,}1 \times 1{,}99 \times 10^{30} \cong 4{,}58 \times 10^{30} kg$

$$\mu_C = \frac{1{,}2 \times 1{,}99 \times 10^{30} \times 1{,}1 \times 1{,}99 \times 10^{30}}{4{,}58 \times 10^{30} kg} \cong 1{,}14 \times 10^{30} kg$$

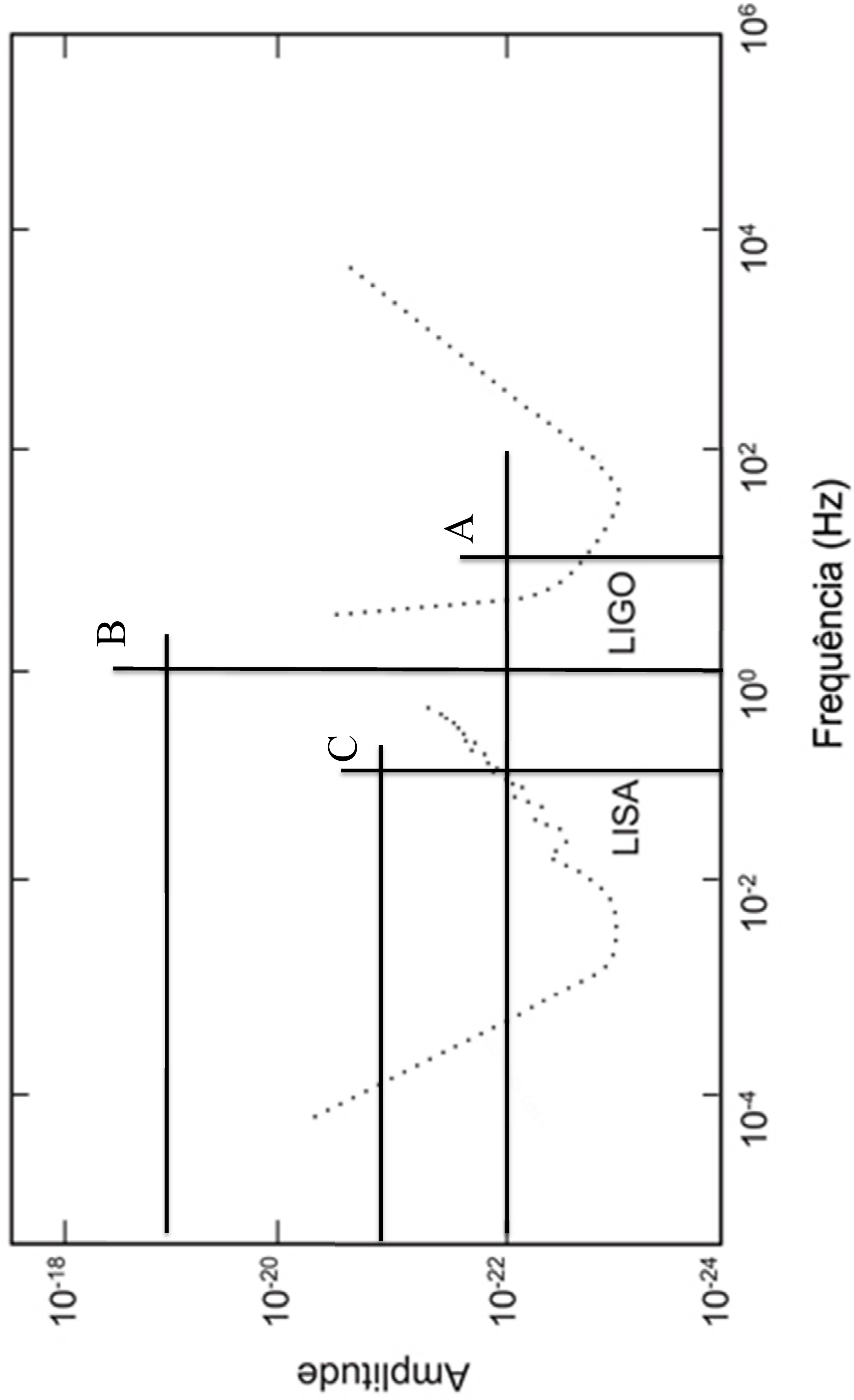
$$h_C = \frac{(6{,}67\times10^{-11})^2}{(3\times10^8)^4} \frac{(1{,}14\times10^{30})}{(10\times10^3 \times 3{,}1\times10^{16})} \frac{(4{,}58\times10^{30})}{10^7} \rightarrow h_C \cong 9{,}25 \times 10^{-22} \approx 10^{-21}$$

b)

Para a Fonte A: $f_A = 2\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{(6{,}67\times10^{-11})(7{,}36\times10^{30})}{(2{,}5\times10^5)^3}} \rightarrow f_A \cong 2{,}82 \times 10^1 \approx 10^1 Hz$

Para a Fonte B: $f_B = 2\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{(6{,}67\times10^{-11})(3{,}98\times10^{33})}{(1{,}6\times10^7)^3}} \rightarrow f_B \cong 1{,}28 \times 10^0 \approx 10^0 Hz$

Para a Fonte C: $f_c = 2\frac{1}{4\pi}\sqrt{\frac{(6{,}67\times10^{-11})(4{,}58\times10^{30})}{(10^7)^3}} \rightarrow f_C \cong 8{,}80 \times 10^{-2} \approx 10^{-1} Hz$


Amplitude
10^{-18}
10^{-20}
10^{-22}
10^{-24}
Frequência (Hz)
10^{-4}
10^{-2}
10^{0}
10^{2}
10^{4}
10^{6}
LISA
LIGO
A
B
C

Questão 6	a) o raio estelar	R_{Bmax} = 1,4 UA e R_{Bmin} = 1,8 UA
	b) luminosidade estelar	$L_{Bmax} = 1{,}8\times10^3\, L_\odot$ e $L_{Bmin} = 78\, L_\odot$
	c) temperatura efetiva	$T_{Bmax} = 2{,}1\times10^3$ K e $T_{Bmin} = 8{,}7\times10^2$ K
	d) comprimento de onda	λ_{max} = 1,4 μm e λ_{min} = 3,3 μm

Questão 6 - espaço para o cálculo

Resolução:

a) O diâmetro angular da estrela é $\theta = \frac{D}{r}$

onde *D* é diâmetro real da estrela e *r* a distância ao observador.

Usando θ_{Bmax}= 2,3 mas e θ_{Bmin}= 3,0 mas, temos:

D_{Bmax} = (1240 pc . 206265 UA/pc) . (2,3×10^{-3} mas . 4,848×10^{-6} rad/mas) = 2,8 UA → R_{Bmax} = 1,4 UA

D_{Bmin} = (1240 pc . 206265 UA/pc) . (3,0×10^{-3} mas . 4,848×10^{-6} rad/mas) = 3,7 UA → R_{Bmin} = 1,8 UA

b) Primeiramente calculamos a magnitude absoluta da estrela no mínimo e máximo através do módulo de distância: m – M = 5 log r – 5 + B.C.

M_{Bmax} = -5.*log*(1240) + 5 + 8,4 - 1,3 = **-3,4 mag**

M_{Bmin} = -5.*log*(1240) + 5 + 12,0 - 1,3 = **+0,23 mag**

Em seguida, calcula-se a luminosidade no máximo e mínimo pela relação M-M=-2,5 log LL onde $M_\odot$ = + 4,75, obtendo

$L_{Bmax} = 1{,}8\times10^3\, L_\odot$ e $L_{Bmin} = 78\, L_\odot$.

c) Obtemos a temperatura através de $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$ obtendo

$T_{Bmax} = 2{,}1\times10^3$ K e $T_{Bmin} = 8{,}7\times10^2$ K

d) O comprimento de onda onde a emissão é máximo é obtido através da lei do deslocamento de Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

onde *b* = 2,9×10^{-3} m/K.

Substituindo chegamos a

λ_{max} = 1,4 μm e λ_{min} = 3,3 μm

Questão 7	a) temperatura	4455 K
	b) luminosidade	0,20 L_{SOL}
	c) raio do planeta	7260 km
	d) separação	0,58 U.A.
	e) temperatura de equilíbrio	218 K

Questão 7 - espaço para o cálculo

Resolução

a) A temperatura efetiva é obtida através da lei do deslocamento de Wien:

$$\lambda_{max} = \frac{b}{T}$$

onde b = 2,9×10^{-3} m/K.

Substituindo chegamos a T=4455 K

b) A luminosidade é dada por $L = 4\pi\sigma R^2 T^4$ = 0,20 $L_\odot$

c) A luminosidade observada da estrela durante o trânsito é

$$L_T = 4\pi\sigma\left(R_*^2 - R_p^2\right)T^4$$

e a diferença de magnitudes observada é

$$m - m_T = -2{,}5\log\left(\frac{L}{L_T}\right)$$

Substituindo os valores e isolando R_P temos

$$R_p^2 = R_*^2\left(1 - 10^{\frac{m-m_T}{-2{,}5}}\right) \rightarrow R_p \cong 7260\ km$$

d) Pela relação massa-luminosidade temos que

$$M = \sqrt[3{,}5]{L} = 0{,}2^{2/7} = 0{,}63\ M_\odot$$

Como T = 0,561 anos, temos que

$$r = \sqrt[3]{\frac{T^2}{M}} \cong 0{,}58\ U.A.$$

e) A potência recebida pelo planeta é

$$P_r = I_0(1-a)\pi R_P^2$$

e a emitida

$$P_e = \varepsilon\sigma 4\pi R_P^2 T_P^4$$

onde a é o albedo, ε a emissividade e $I_0 = \frac{L}{4\pi r^2}$

No equilíbrio temos a igualdade entre as potências.

Igualando as relações e resolvendo para T_P chegamos a T_P = 218 K.

Questão 8	b.1) K_B	0,23
	b.2) K_v	0,15
	c.1) magnitude B	17,0
	c.2) magnitude V	16,1
	d) índice de cor *(B-V)*	0,9

Para o item a) será fornecida duas folhas de papel milimetrado

Questão 8 - espaço para o cálculo

a) o primeiro passo é calcular a massa de ar X para os valores de distância zenital, obtendo:

X	mb	X	mv
1,223	17,309	1,227	16,280
1,224	17,303	1,227	16,302
1,233	17,288	1,228	16,302
1,235	17,287	1,228	16,278
1,430	17,351	1,422	16,312
1,591	17,373	1,561	16,351
1,609	17,372	1,581	16,337
1,857	17,435	1,918	16,383
1,949	17,474	2,006	16,408
1,977	17,477	2,030	16,415

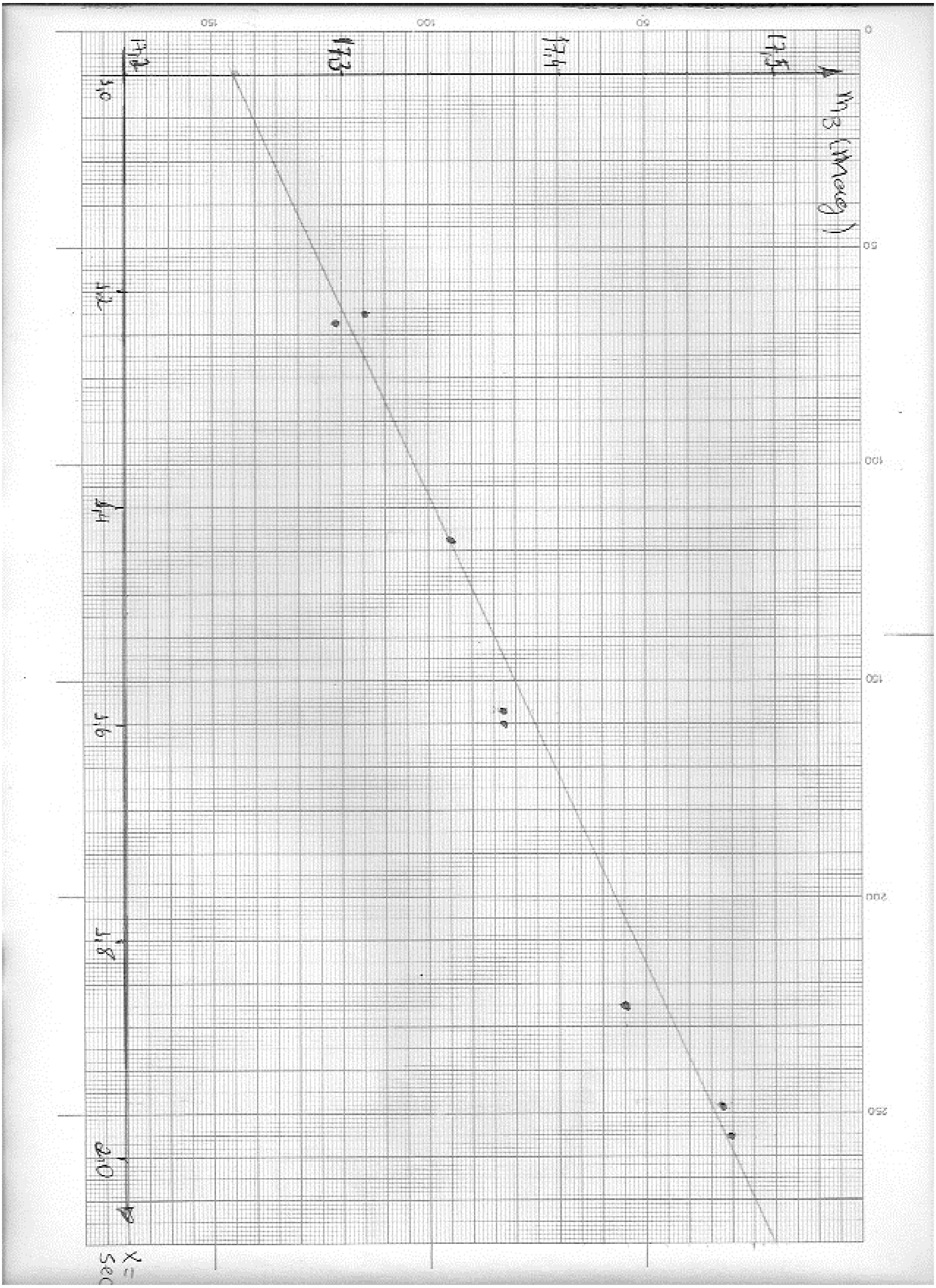
b) Os ajustes de reta fornecem os coeficiente angulares:

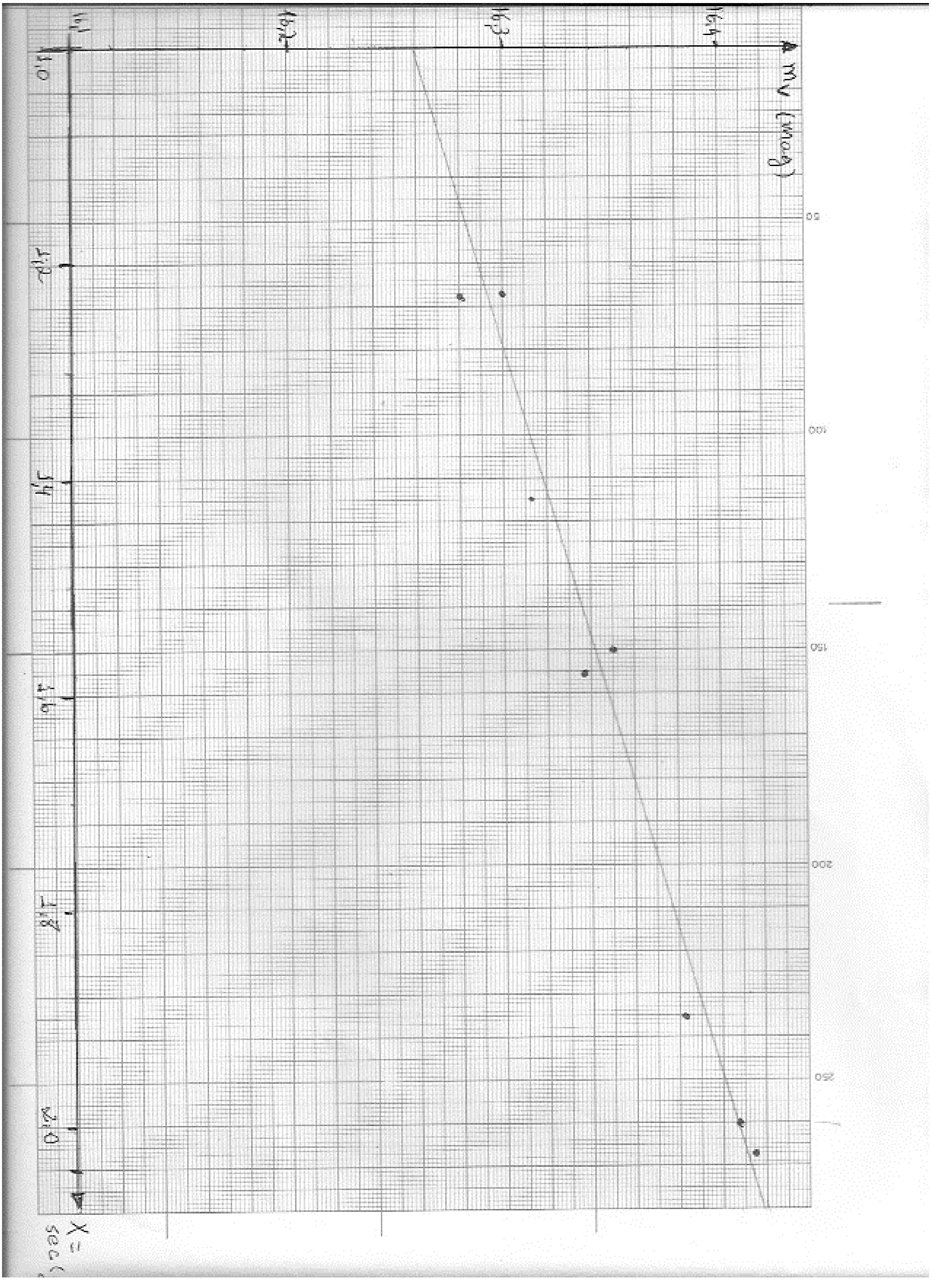
Filtro B: $\boldsymbol{K_B = 0{,}23}$ e Filtro V: $\boldsymbol{K_V = 0{,}15}$

c) Os ajustes de reta fornecem os coeficiente lineares:

Filtro B: $\mathbf{m_B = 17{,}0}$ e Filtro V: $\mathbf{m_V = 16{,}1}$

d) Calculando (B-V) : $\boldsymbol{m_B - m_v}$ = **0,9**


17,3
17,4
17,5
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0


mv (mag)
16,2
16,3
16,4
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0